

বিএসসি (অনার্স) প্রথম বর্ষ পরীক্ষা—২০১৪

অ্যানালাইটিক অ্যান্ড ভেক্টর জিওম্যাট্রি

বিষয় কোড : ২১৩৭০৭

ক-বিভাগ

১। যেকোনো ১০ টি প্রশ্নের উত্তর দাও—

১ × ১০ = ১০

(ক) অক্ষের আবর্তন বলতে কী বুঝ?

উত্তর : মূলবিন্দুকে অপরিবর্তিত রেখে কেবল অক্ষের দিক পরিবর্তনকে অক্ষের আবর্তন বলে।

(খ) $a^2 + 2hxy + by^2 = 0$ থেকে xy এর পদ অপসারণের জন্য ঘূর্ণনের কোণ কত?উত্তর : $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ থেকে xy এর পদ অপসারণের জন্য অক্ষদ্বয়কে $\theta = \frac{1}{2}$ $\tan^{-1} \left(\frac{2h}{a-b} \right)$ কোণে আবর্তন করতে হবে।(গ) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকরণটি একজোড়া লম্ব সরলরেখা নির্দেশ করার শর্ত কী?উত্তর : যদি $\Delta = 0$ এবং $a + b = 0$ হয়, যেখানে $\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$, তবে সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ দ্বারা পরস্পর লম্ব যুগল সরলরেখা নির্দেশিত হয়।

(ঘ) দিক কোসাইনের মৌলিক উপপাদ্যের বর্ণনা দাও।

উত্তর : কোনো সরলরেখার দিক কোসাইন l, m, n হলে $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ ।(ঙ) z অক্ষের দিক কোসাইন লিখ।উত্তর : z অক্ষের দিক কোসাইন $\cos \frac{\pi}{2}, \cos \frac{\pi}{2}, \cos 0$ বা, $0, 0, 1$ ।

(চ) স্থানাঙ্কের সমতলসমূহের সমীকরণ লিখ।

উত্তর : স্থানাঙ্কের সমতলসমূহ YZ সমতল, ZX সমতল ও XY সমতলের সমীকরণ যথাক্রমে $x = 0, y = 0$ ও $z = 0$ ।(ছ) $3(x - 1) = 3y - 9 = 6z$ রেখাটির প্রতিসম আকারটি কী?

উত্তর : প্রদত্ত সমীকরণ এর প্রতিসাম্য আকার,

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1}$$

(জ) দুইটি সরলরেখার ক্ষুদ্রতম দূরত্ব বলতে কী বুঝ?

উত্তর : কোন রেখাংশের দুই প্রান্তবিন্দুতে দুইটি নৈকতলীয় সরলরেখা লম্ব হলে ঐ রেখাংশের দৈর্ঘ্যকে সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে ক্ষুদ্রতম দূরত্ব বলে।

(ঝ) মহাবৃত্ত কাকে বলে?

উত্তর : সমতল ও গোলকের ছেদ বক্ররেখাকে বৃত্ত বলে। যদি বৃত্ত ও গোলকের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ একই হয়, তবে বৃত্তটিকে মহাবৃত্ত বলে।

(ঞ) \vec{a} ভেক্টর বরাবর \vec{b} এর উপাংশ কত?

$$\text{উত্তর : } \vec{a} \text{ ভেক্টর বরাবর } \vec{b} \text{ এর উপাংশ} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$$

(ট) \vec{a} ও \vec{b} ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে $\cos \theta$ ও $\sin \theta$ এর মান কত?

$$\text{উত্তর : } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\text{এবং } \sin \theta = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

(ঠ) $\hat{i} - \hat{j}$ এবং $-\hat{i} - \hat{j}$ এর মধ্যবর্তী কোণ কত?

$$\text{উত্তর : এখানে, } (\hat{i} - \hat{j}) \cdot (-\hat{i} - \hat{j})$$

$$= -\hat{i} \cdot \hat{i} - \hat{i} \cdot \hat{j} + \hat{j} \cdot \hat{i} + \hat{j} \cdot \hat{j}$$

$$= -1 - 0 + 0 + 1$$

$$= 0$$

$$\therefore \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \cos 90^\circ$$

$$\therefore \theta = 90^\circ$$

সুতরাং প্রদত্ত ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 90° ।

খ-বিভাগ

যে কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও—

৪ × ৫ = ২০

- ২। মূলবিন্দুকে (2,3) বিন্দুতে স্থানান্তর করে অক্ষদ্বয়কে 45° কোণে আবর্তন করলে তখন $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 18x - 22y + 50 = 0$ সমীকরণের রূপান্তরিত সমীকরণ নির্ণয় কর।
- ৩। প্রমাণ কর যে, $(x^2 + y^2) \sin^2 \alpha = (x \cos \theta - y \sin \theta)^2$ একজোড়া সরলরেখা প্রকাশ করে যারা মূলবিন্দুগামী এবং সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 2α ।
- ৪। $8x^2 + 4xy + 5y^2 - 16x - 14y + 13 = 0$ সমীকরণকে প্রমাণ আকারে রূপান্তর কর।
- ৫। দুইটি সরলরেখার দিক কোসাইন যথাক্রমে ℓ_1, m_1, n_1 এবং ℓ_2, m_2, n_2 হলে, রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।
- ৬। একটি ঘনকের দুইটি কর্ণের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।
- ৭। $x + 2y + 3z - 4 = 0$ এবং $2x + y - z + 5 = 0$ সমতলদ্বয়ের ছেদ রেখাগামী এবং $5x + 3y + 6z + 8 = 0$ সমতলের উপর লম্ব সমতলের সমীকরণ নির্ণয় কর।
- ৮। $\frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+7}{-3}$ এবং $\frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z+1}{-1}$ রেখাদ্বয় একই সমতলে অবস্থিত কিনা মন্তব্য কর।
- ৯। দেখাও যে, $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot (\vec{a} \times \vec{d}) + (\vec{a} \times \vec{d}) \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) + (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) = 0$

গ-বিভাগ

যে কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও—

১০ × ৫ = ৫০

- ১০। $17x^2 + 18xy - 7y^2 - 16x - 32y - 18 = 0$ সমীকরণ হতে x, y এবং xy যুক্ত পদগুলি অপসারণ করে রূপান্তরিত সমীকরণ নির্ণয় কর।
- ১১। যদি সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এক জোড়া সরলরেখা প্রকাশ করে, তবে প্রমাণ কর যে, $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$ এবং সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয় কর।
- ১২। যদি $ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ay^4 = 0$ দ্বারা প্রকাশিত সরলরেখাগুলির দুইটি, অপর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডক হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $c + ba = 0$ এবং $b + d = 0$

১৩। $5x^2 + 2xy + 5y^2 + 26x + 34y + 65 = 0$ সমীকরণটিকে আদর্শ আকারে প্রকাশ কর এবং এর অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ নির্ণয় কর।

১৪। দুইটি সরলরেখার দিক কোসাইন $\ell - 5m + 3n = 0$ এবং $7\ell^2 + 5m^2 - 3n^2 = 0$ সমীকরণ দ্বারা নির্দেশিত হলে রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

১৫। যদি একই মূল বিন্দুর সাপেক্ষে দুই শ্রেণির আয়তাকার অক্ষদ্বয়কে কোনো সমতল a, b, c এবং a_1, b_1, c_1 দূরত্বে ছেদ করে, তবে দেখাও যে, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{c_1^2}$

১৬। $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ এবং $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রতম দূরত্ব এবং উহার সমীকরণ নির্ণয় কর। আরো ক্ষুদ্রতম দূরত্বটি প্রদত্ত রেখাদ্বয়কে যে সকল বিন্দুতে ছেদ করে তাহাদের স্থানাংক নির্ণয় কর।

১৭। $[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]$ তিনটি ভেক্টরের ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে, $[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]^2 =$

$$\begin{bmatrix} \underline{a} \cdot \underline{a} & \underline{a} \cdot \underline{b} & \underline{a} \cdot \underline{c} \\ \underline{b} \cdot \underline{a} & \underline{b} \cdot \underline{b} & \underline{b} \cdot \underline{c} \\ \underline{c} \cdot \underline{a} & \underline{c} \cdot \underline{b} & \underline{c} \cdot \underline{c} \end{bmatrix} = [\underline{a} \times \underline{b} \cdot \underline{c} \times \underline{a}]$$