

## বিএসসি (অনার্স) প্রথম বর্ষ পরীক্ষা-২০১০

## ক্যালকুলাস-১

বিষয় কোড : ২১৩৭০৩

সময় : ৪ ঘণ্টা

পূর্ণমান-৬০

[দ্রষ্টব্য: প্রতিটি বিভাগের প্রশ্নের উত্তর ধারাবাহিকভাবে লিখতে হবে।]

## ক-বিভাগ

১। যেকোনো ১০ টি প্রশ্নের উত্তর দাও-

১ × ১০ = ১০

(ক) ফাংশনের রেঞ্জ-এর সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : মনে করি,  $y = f(x)$  একটি ফাংশন। ফাংশনের ডোমেনের  $x$  এর জন্য  $f(x)$  এর যে সকল মান পাওয়া যায় তাদের সেটকে ফাংশনের রেঞ্জ বলে। প্রতীকের সাহায্যে  $f$  এর রেঞ্জ = Range  $f = \{ y : y = f(x), x \in \text{dom } f \}$

(খ)  $f(x) = \ln x$  ফাংশনের ডোমেন কত?

উত্তর :  $f(x) = \ln(x)$  ফাংশনে  $x > 0$  এর জন্য  $f(x)$  এর বাস্তব মান বিদ্যমান।  
 $\therefore$  ডোমেন  $f = (0, \infty)$

(গ) অভেদ ফাংশন কাকে বলে?

উত্তর :  $f(x) = x$  সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত  $f: A \rightarrow A$  ফাংশনকে অভেদ ফাংশন বলে।

(ঘ) উদাহরণসহ জোড় ও বিজোড় ফাংশন সংজ্ঞায়িত কর।

উত্তর : যদি  $f(-x) = f(x)$  হয়, তবে  $f(x)$  কে জোড় ফাংশন বলে।

যেমন-  $f(x) = x^4 + \cos x$  হলে  $f(-x) = (-x)^4 + \cos(-x)$   
 $= x^4 + \cos x = f(x)$

আবার, যদি  $f(-x) = -f(x)$  হয়, তবে  $f(x)$  ফাংশনকে বিজোড় ফাংশন বলে।

যেমন-  $f(x) = x^3 + \sin x$  হলে  $f(-x) = (-x)^3 + \sin(-x)$   
 $= -x^3 - \sin x$   
 $= -(x^3 + \sin x) = -f(x)$

(ঙ)  $x = a$  বিন্দুতে একটি ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : মনে করি,  $y = f(x)$  একটি ফাংশন।

$f(x)$  ফাংশন  $x = a$  বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হবে যদি  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$  হয়।

অথবা,  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a-h) = f(a)$  হয়।

(চ) জ্যামিতিকভাবে  $\frac{dy}{dx}$  কী নির্দেশ করে?

উত্তর : যদি কোনো বক্ররেখা  $y = f(x)$  এর উপর অবস্থিত  $p(x,y)$  বিন্দুর সম্পর্ক  $x$  অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে  $\alpha$  কোণ উৎপন্ন করে তবে,  $\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$ । এখানে,  $\frac{dy}{dx}$  কে বলা হয় স্পর্শকের ঢাল।

(ছ)  $x$  এর সাপেক্ষে  $y = x^n$  এর  $n$  তম অন্তরজ কত?

উত্তর :  $x$  এর সাপেক্ষে  $y = x^n$  এর  $n$  তম অন্তরজ বা  $n$  তম অন্তরক সহগ

$$y_n = \frac{d^n y}{dx^n} = n!$$

(জ) কোনো বক্ররেখার সন্ধিবিন্দু বলতে কী বুঝায়?

উত্তর : পর পর ক্রমবর্ধমান বা ক্রমহ্রাসমান অংশের মিলনকে সন্ধি বিন্দু বলে। অর্থাৎ যে সকল বিন্দুতে  $f'(x) = 0$  অথবা  $f'(x)$  বিদ্যমান নাই সে সকল বিন্দুকে  $f(x)$  ফাংশনের সন্ধি বিন্দু বলে।

(ঝ) প্রথম গড়মান উপপাদ্যের বর্ণনা দাও।

উত্তর : যদি  $f(x)$  ফাংশন  $a \leq x \leq b$  বন্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন হয় এবং  $a < x < b$  মুক্ত ব্যবধিতে  $f'(x)$  বিদ্যমান থাকে, তবে  $(a,b)$  মুক্ত ব্যবধির মধ্যে  $x$  এর অন্তত পক্ষে এমন একটি মান  $c$  পাওয়া যাবে, যেন  $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$  হয়।

(ঞ) ফাংশনের গরিষ্ঠমান কাকে বলে?

উত্তর :  $x = a$  বিন্দুতে  $f(x)$  এর গরিষ্ঠমান আছে বলা হবে যদি  $a$  বিন্দুকে অর্ন্তভুক্ত করে একটি ব্যবধি  $a-h < x < a+h$  পাওয়া যায়, যে ব্যবধিতে  $f(x)$  এর গরিষ্ঠমান হবে  $f(a)$ । অর্থাৎ  $a-h < a+h$  এর অন্তর্গত যে কোন বিন্দু  $x$  এর জন্য  $f(x) < f(a)$  হবে যাতে  $f(a+h) - f(a) < 0$ , যখন  $|h|$  যথেষ্ট ক্ষুদ্র।

(ট) অনির্ণেয়  $\frac{0}{0}$  আকার বলতে কী বুঝ?

উত্তর :  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$  সীমার যদি  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \rightarrow 0$  এবং  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \rightarrow 0$

হয়, তবে  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  সীমা  $\frac{0}{0}$  আকার হয় যা অর্থহীন। কিন্তু এর অর্থ এই নয় যে এর মান (সীমা) নির্ণয় করা যাবে না। এই রূপ  $\frac{0}{0}$  আকারকে অনির্ণেয় আকার বলে।

(ঠ) দু'টি বক্ররেখার অন্তর্গত কোণ সংজ্ঞায়িত কর।

উত্তর : মনেকরি,  $f(x, y)$  ও  $g(x, y)$  দু'টি বক্ররেখার সমীকরণ। বক্ররেখা দু'টির মধ্যবর্তী কোণ  $\theta$  হলে,  $\tan \theta = \frac{g_x f_y - g_y f_x}{g_x f_x + f_y g_y}$ ।

(ড) প্রতিডেরিভেটিভ কী?

উত্তর : একটি ফাংশন  $f(x)$  কে কোনো প্রদত্ত ব্যবধিতে বর্ণিত ফাংশন  $g(x)$  এর প্রতিডেরিভেটিভ বলা হবে যদি ঐ ব্যবধির সকল  $x$  এর জন্য  $\frac{d}{dx} [f(x)] = g(x)$  হয়।

(ঢ) অপ্রকৃত ইন্টিগ্রালের সংজ্ঞা লিখ।

উত্তর : একটি নির্দিষ্ট যোগজ  $\int_a^b f(x) dx$  কে অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল বলা হবে যদি ইন্টিগ্রালের লিমিট  $a$  এবং  $b$  এর কমপক্ষে একটি অসীম হয় অথবা যদি  $a \leq x \leq b$  ব্যবধির এক বা একাধিক বিন্দুতে ইন্টিগ্রাল  $f(x)$  বিচ্ছিন্ন হয়।

(ণ)  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$  এর মান কত?

উত্তর :  $\ln |f(x)| + c$  Ans.

(ত) সমাকলনীয় ধ্রুবক কী?

উত্তর : যদি  $f(x)$  এর ইন্টিগ্রাল  $F(x)$  হয় তবে যে কোনো ধ্রুবক  $c$  এর জন্য  $F(x) + c$  ও  $f(x)$  এর ইন্টিগ্রাল হবে।

$\therefore \int f(x) dx = F(x) + c$ ।  $c$  কে ইন্টিগ্রেশনের ধ্রুবক বলে।

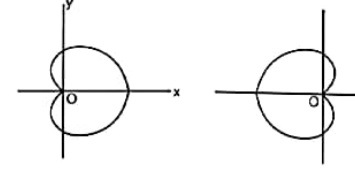
(থ) ইন্টিগ্রাল ক্যালকুলাসের মৌলিক উপপাদ্যের বর্ণনা দাও।

উত্তর : যদি  $f(x)$  ফাংশন  $a \leq x \leq b$  ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং  $a < x < b$  খোলা ব্যবধিতে সমাকলনযোগ্য হয় এবং  $f(x)$  এর প্রতি অন্তরক  $F(x)$  অর্থাৎ

$F'(x) = f(x)$  হয় তবে  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ .

(দ)  $r = a(1 + \cos \theta)$  বক্ররেখাটি অংকন কর।

উত্তর : নিম্নে বক্ররেখাদ্বয় অংকন করা হলো।



(ধ) সাইক্লয়েড কী?

উত্তর : যদি একটি বৃত্ত, সমতলের উপর সরল রেখা বরাবর ঘুরে চলে এবং বৃত্তের একটি নির্দিষ্ট বিন্দু যে পথ তৈরি করে বা সঞ্চারণপথ সৃষ্টি করে তাকে সাইক্লয়েড বলে।

(ন) গামা ফাংশনের সংজ্ঞা দাও।

উত্তর :  $n > 0$  হলে  $\int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx$  কে গামা ফাংশন বলে। একে  $\Gamma(n)$  দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$$\therefore \Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx.$$

(প)  $r = a \cos 4\theta$  বক্ররেখার ফাঁস কয়টি আছে?

উত্তর :  $r = a \cos 4\theta$  এর আটটি ফাঁস আছে।

(ফ) প্রথম শ্রেণির অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল কাকে বলে?

উত্তর : একটি নির্দিষ্ট ইন্টিগ্রাল এর নিম্নসীমা অথবা উচ্চসীমা বা উভয়ই অসীম হলে তাকে প্রথম শ্রেণির অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল বলে।

(ব)  $y = f(x)$  বক্ররেখার  $(x_1, y_1)$  বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ লিখ।

উত্তর :  $y = f(x)$  বক্ররেখার স্পর্শকের উপর যে কোনো বিন্দু  $(x, y)$  হলে বক্ররেখার  $(x_1, y_1)$  বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ  $y - y_1 = \frac{dy}{dx} (x - x_1)$ ।

(ভ) আবর্তনজনিত ঘনবস্তু কাকে বলে?

উত্তর : একটি বক্ররেখার অধীন ক্ষেত্রফলকে কোনো সরলরেখা বা অক্ষের চারদিকে আবর্তন করলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, একে আবর্তন জনিত ঘনবস্তু বলে।

## খ-বিভাগ

২। (ক)  $y = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$  ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(খ) নিম্নের ফাংশনের লেখচিত্র অংকন কর।

৩। (ক) লিমিটের  $(\delta, \epsilon)$  সংজ্ঞা ব্যবহার করে দেখাও যে,  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$

(খ)  $\sec^{-1} \frac{1}{2x^2 - 1}$  এর সাপেক্ষে  $\tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$  এর অন্তরীকরণ কর।

৪। (ক)  $y = x^x$  হলে  $\frac{dy}{dx}$  নির্ণয় কর।

(খ)  $\sin y = x \sin(a + y)$  হলে প্রমাণ কর যে,  $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a + y)}{\sin a}$

৫। (ক) গড়মান উপপাদ্যের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দাও।

(খ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$  এর মান নির্ণয় কর।

৬। (ক) সমাকলন এর (Integrate) :  $\int \frac{1 - \sin x}{x + \cos x} dx$  অথবা,  $\int \frac{dx}{(1 + x^2)\sqrt{1 - x^2}}$

(খ) মান নির্ণয় কর [Evaluate] :

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx \text{ অথবা } \int_0^{\pi} x \ln(\sin x) dx$$

৭। (ক)  $\int \sin^n x dx$  এর লঘুকরণ সূত্র প্রতিষ্ঠা কর।

(খ) প্রমাণ কর [Prove that] :  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

৮। (ক)  $x^2 + y^2 = a^2$  বৃত্তটির পরিসীমা নির্ণয় কর।

(খ)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  উপবৃত্তটি  $x$  অক্ষের চারদিকে ঘুরলে উৎপন্ন ঘনবস্তুটির আয়তন নির্ণয় কর।

৯। (ক)  $\int_0^1 \frac{dx}{x(1+x)}$  এর অভিসৃতি পরীক্ষা কর।

(খ)  $y = \ln(\sec x)$  রেখার  $x = 0$  হতে  $x = \frac{\pi}{4}$  পর্যন্ত চাপ দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

## গ-বিভাগ

১০। নিম্নের ফাংশনের  $x = 0$  এবং  $x = \frac{\pi}{2}$  বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণযোগ্যতা পরীক্ষা কর।

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{যখন } x < 0 \\ 1 + \sin x, & \text{যখন } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 2 + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2, & \text{যখন } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

১১। রোলের উপপাদ্যটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর। উহার জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দাও।

১২। যদি  $y = (\sinh^{-1} x)^2$  হয় তবে দেখাও যে,  $(1 + x^2)y_{n+2} + (2n + 1)xy_{n+1} + x^2y_n = 0$

১৩। ল্যাম্বাঙ্ক আকারের অবশেষসহ টেলর উপপাদ্যের বর্ণনা ও প্রমাণ দাও।

১৪। নিম্নের ফাংশনটির গরিষ্ঠমান ও লঘিষ্ঠমান নির্ণয় কর।

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5.$$

১৫। Wallis এর সূত্র বর্ণনা কর। ইহার সাহায্যে  $\int_0^{\pi/2} \sin^7 x \, dx$  এর মান নির্ণয় কর।

১৬।  $r = a(1 + \cos \theta)$  কার্ডিয়ডকে আদি রেখার সাপেক্ষে আবর্তন করলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।