

বিএসসি (অনার্স) প্রথম বর্ষ পরীক্ষা-২০১১

ক্যালকুলাস-১

বিষয় কোড : ২১৩৭০৩

ক-বিভাগ

১। যেকোনো ১০ টি প্রশ্নের উত্তর দাও-

১ × ১০ = ১০

(ক) ফাংশনের ডোমেনের সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : যদি $f: A \rightarrow B$ একটি ফাংশন হয়। তাহলে A কে f এর ডোমেন এবং B কে f এর কোডোমেন বলে। D_f দ্বারা ডোমেন, Cod_f দ্বারা কোডোমেনকে প্রকাশ করা হয়।

(খ) $f(x) = \frac{1}{x}$ ফাংশনের রেঞ্জ কত?উত্তর : ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R} - \{0\}$ (গ) $f(x) = |x|$ দ্বারা কী বুঝায়?

উত্তর : $y = f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{যখন } x \geq 0 \\ -x & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$ কে পরম মান ফাংশন বলে।

(ঘ) ধ্রুবক ফাংশন কাকে বলে?

উত্তর : যদি কোনো ফাংশন এমন হয় যে, ডোমেনের সকল মানের জন্য $f(x) = c$ হয়। তবে $f(x)$ কে ধ্রুবক ফাংশন বলে।

(ঙ) $f(x) = x^5 + x$ ফাংশনটি জোড় না বিজোড় তা নির্ণয় কর।

উত্তর : $f(-x) = (-x)^5 + (-x) = -x^5 - x = -f(x)$ সুতরাং বিজোড় ফাংশনের সূত্রানুসারে প্রদত্ত ফাংশন বিজোড় ফাংশন।

(চ) x এর কোনো মানের জন্য $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন নয় নির্ণয় কর।উত্তর : $x = \pm 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন নয়।(ছ) কোন শর্তে $y = f(x)$ রেখার স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল হবে?

উত্তর : (x, y) বিন্দুতে $y = f(x)$ রেখার ঢাল $\frac{dy}{dx} = 0$ হলে $y = f(x)$ রেখার স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল হবে।

(জ) x এর সাপেক্ষে $y = e^{2x}$ এর n তম অন্তরজ কত?উত্তর : n তম অন্তরজ $y_n = 2^n e^{2x}$ (ঝ) $x = a$ বিন্দুতে একটি ফাংশন $f(x)$ এর গরিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান থাকার প্রয়োজনীয় শর্ত

লিখ।

উত্তর : $f(x)$ ফাংশনের গরিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান থাকার প্রয়োজনীয় শর্ত ঐ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 0$

(এ) চারটি অনির্ণেয় আকার লিখ।

উত্তর : $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty$ ।(ট) $\int e^x \{f(x) + f'(x)\} dx$ এর মান কত?উত্তর : $\int e^x \{f(x) + f'(x)\} dx = e^x f(x) + c$ (ঠ) $f(x)$ অযুগ্ম ফাংশন হলে $\int_{-a}^a f(x) dx$ এর মান কত?উত্তর : $f(x)$ অযুগ্ম ফাংশন হলে $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

(ড) বিটা ফাংশনের সংজ্ঞা দাও।

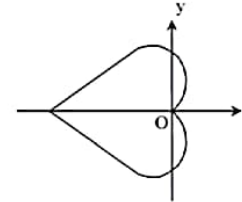
উত্তর : $m, n > 0$ হলে $\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$ কে বিটা ফাংশন বলে। একে $\beta(m, n)$

দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$\therefore \beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$

(ঢ) $r = a(1 - \cos\theta)$ বক্ররেখা অঙ্কন কর।

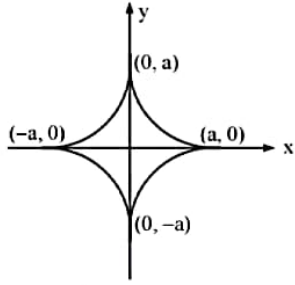
উত্তর :



(ণ) বিটা ও গামা ফাংশনের সম্পর্ক লিখ।

উত্তর : $\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ (ত) $x^3 + y^3 = a^3$ বক্ররেখা অঙ্কন কর।

উত্তর : ইহা অ্যাসট্রোয়েড নির্দেশ করে।



(খ) $r = a \cos 3\theta$ বক্ররেখার কয়টি ফাঁস আছে?

উত্তর : $r = a \cos 3\theta$ বক্ররেখার তিনটি ফাঁস আছে।

(দ) $\Gamma(1)$ ও $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মান কত?

উত্তর : $\Gamma(1) = 1$ এবং $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

(ধ) $y = f(x)$ বক্ররেখার (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণটি লিখ।

উত্তর : (x, y) অভিলম্বের উপরস্থ কোনো বিন্দু হলে $y = f(x)$ বক্ররেখার (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,

$$y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)$$

(ন) গামা ও ফ্যাক্টোরিয়াল ফাংশনের সম্পর্ক লিখ।

উত্তর : $\Gamma(n+1) = n!$; $n \in \mathbb{N}$

(প) দ্বিতীয় শ্রেণির অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল কাকে বলে?

উত্তর : যদি f ফাংশনটি $a \leq x \leq b$ ব্যবধির a বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয় তবে $\int_a^b f(x) dx$

$= \lim_{t \rightarrow a^+} \int_a^t f(x) dx$ যদি এই সীমাটি বিদ্যমান থাকে। এই ধরনের অপ্রকৃত যোগজকে

দ্বিতীয় প্রকারের অপ্রকৃত যোগজ বলা হয়।

(ফ) $\int f(x) \sqrt{f(x)} dx = \text{কত?}$

উত্তর : $\int f(x) \sqrt{f(x)} dx = \frac{2}{3} \{f(x)\}^{\frac{3}{2}} + c$

(ব) একটি বক্ররেখার স্বকীয় সমীকরণ বলতে কী বুঝ?

উত্তর : কোনো বক্ররেখার উপরস্থ একটি বিন্দু হতে একটি চলমান বিন্দুর মধ্যকার চাপের দৈর্ঘ্য S এবং চলমান বিন্দুতে অংকিত স্পর্শক x -অক্ষের সাথে ψ কোণ উৎপন্ন করলে S এবং ψ সম্পর্কে রেখাটির স্বকীয় সমীকরণ বলে।

(ভ) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$ এর মান কত?

উত্তর : $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx = 0$

খ-বিভাগ

যে কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও-

২। (ক) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(খ) $f(x) = |x+1| + |x-2|$ ফাংশনের লেখচিত্র আঁক।

৩। (ক) লিমিটের $(\delta - \epsilon)$ সংজ্ঞা ব্যবহার করে দেখাও যে, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$

(খ) $\tan^{-1} x$ এর সাপেক্ষে $\tan^{-1} \frac{\sqrt{(1+x^2)} - 1}{x}$ এর অন্তরীকরণ কর।

৪। (ক) $x^y = y^x$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

(খ) $y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

৫। (ক) দেখাও যে : $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^n \ln x) = \frac{n!}{x}$

(খ) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ এর মান নির্ণয় কর।

৬। (ক) সমাকলন কর : $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$

(খ) মান নির্ণয় কর : $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$

৭। (ক) $\int \tan^n x dx$ এর লঘুকরণসূত্র প্রতিষ্ঠা কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

৮। (ক) $r = 2(1 - \cos\theta)$ কার্ডিওয়েডের পরিসীমা নির্ণয় কর।

(খ) $3ay^2 = x(x - a)^2$ বক্ররেখা দ্বারা গঠিত ফাঁসের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৯। (ক) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$ এর অভিসৃতি পরীক্ষা কর।

(খ) $r = a \cos 3\theta$ বক্ররেখার একটি ফাঁসের ক্ষেত্রফল বের করে উহার সকল ফাঁসগুলির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ-বিভাগ

যে কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও-

১০। নিম্নের ফাংশনের $x = -3$ এবং $x = 1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণযোগ্যতা পরীক্ষা কর।

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{যখন } x \geq 1 \\ 4 & \text{যখন } -3 \leq x < 1 \\ -2x-2 & \text{যখন } x < -3 \end{cases}$$

১১। প্রথম গড়মান উপপাদ্যটি বর্ণনাসহ প্রমাণ কর।

১২। যদি $y = \sin(m \sin^{-1} x)$ হয় তবে দেখাও যে, $(1 - x^2) y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} +$

$$(m^2 - n^2)y_n = 0$$

১৩। $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$ ফাংশনটির গরিষ্ঠমান ও লঘিষ্ঠমান নির্ণয় কর।

১৪। বিটা ও গামা ফাংশনের মধ্যে সম্পর্কটি প্রতিষ্ঠা কর।

১৫। $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ সাইক্লয়েডকে x অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর।

১৬। দেখাও যে, $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} = \frac{a^2}{3}$ বক্ররেখার পূর্ণ দৈর্ঘ্য $6a$ ।