

বিএসসি (অনার্স) প্রথম বর্ষ পরীক্ষা-২০১২

ক্যালকুলাস-১

বিষয় কোড : ২১৩৭০৩

ক-বিভাগ

১। যেকোনো ১০ টি প্রশ্নের উত্তর দাও-

১ × ১০ = ১০

(ক) এক এক ফাংশনের সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : যদি $f: X \rightarrow Y$ একটি ফাংশন হয়, তাহলে f কে এক-এক বলা হবে যদি $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y; \forall x, y \in X$

(খ) $y = \sqrt{x-1}$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর।

উত্তর : ডোমেন = $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$
 $= [1, \infty)$

(গ) $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতার সংজ্ঞা দাও।উত্তর : $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন হবেযদি $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ হয়।যেখানে $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ও $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ সসীম ও বিদ্যমান থাকবে।(ঘ) $y = u^v$ হলে $\frac{dy}{dx}$?উত্তর : $y = u^v$ $\Rightarrow \ln y = \ln u^v$ $\Rightarrow \ln y = v \ln u$ $\therefore \frac{dy}{dx} = u^v \left(\frac{v}{u} \frac{du}{dx} + \ln u \frac{dv}{dx} \right)$ (ঙ) $(\delta - \varepsilon)$ এর সাহায্যে ফাংশনের সীমার সংজ্ঞা দাও।উত্তর : যদি প্রত্যেক $\varepsilon > 0$ এর জন্য δ এর উপর নির্ভরশীল অপর একটি সংখ্যা $\delta > 0$ বিদ্যমান থাকে যেন, $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ হয়, l কে $f(x)$ এর সীমা বলাহয় এবং একে $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।(চ) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - \infty$ দ্বারা কী বোঝায়?উত্তর : যখন x এর মান a এর বাম বা ডান দিক হতে a এর অতি নিকটবর্তী হয়, তখন $f(x)$ এর মান অসীমভাবে ক্ষুদ্র হতে ক্ষুদ্রতর হয়।(ছ) কোন বিন্দুতে $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন?উত্তর : $2x+1=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ বিন্দুতে $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন।

(জ) অন্তরক সহগ কাকে বলে?

উত্তর : $y = f(x)$ রেখার (x, y) বিন্দুতে x এর সাপেক্ষে y এর পরিবর্তন হার $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ এরসীমাহীন মান $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ কে x এর সাপেক্ষে y এর অন্তরক সহগ বলে। একে $\frac{dy}{dx}$ বা f'

'(x) দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(ঝ) x এর সাপেক্ষে $y = \ln x$ এর n তম অন্তরক কত?উত্তর : $y = \ln x$ এর n তম অন্তরক, $y_n = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}$ ।

(ঞ) ফাংশনের চরম বিন্দু কী?

উত্তর : ফাংশনের যে সকল বিন্দুতে ফাংশনের লঘিষ্ঠমান ও গরিষ্ঠমান বিদ্যমান সেই সকল বিন্দুকে ফাংশনের চরম বিন্দু বলে।

(ট) অনির্ণেয় $\frac{\infty}{\infty}$ আকার বলতে কী বুঝ?উত্তর : যদি $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$ এবং $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm \infty$ হয়, তবে $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ কেঅনির্ণেয় $\frac{\infty}{\infty}$ আকার বলে।(ঠ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x} = ?$ উত্তর : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x} = \infty$ (ড) $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$ এর সূত্র লিখ।উত্তর : $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2+a^2}| + c$$

(ঢ) $\int e^{ax} \sin(bx + c) dx$ এর সূত্র লিখ।

উত্তর : $\int e^{ax} \sin(bx + c) dx$

$$= \frac{e^{ax} \{a \sin(bx + c) - b \cos(bx + c)\}}{a^2 + b^2} + c$$

$$= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \left(bx - \tan^{-1} \frac{b}{a} \right) + C$$

(গ) ইন্টিগ্রেশনের লঘুকরণ সূত্র কী?

উত্তর : অংশক্রমে ইন্টিগ্রেশন পদ্ধতির সাহায্যে ধাপে ধাপে ইন্টিগ্রাল ফাংশনের ঘাত লঘু বা হ্রাস করার পদ্ধতিকে ইন্টিগ্রেশনের লঘুকরণ সূত্র বলা হয়।

(ত) $\int_a^b f(x) dx$ কে যোগের সীমারূপে লিখ।

$$\text{উত্তর : } \int_a^b f(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{r=1}^n f(a + rh) \text{ যেখানে } nh = b - a$$

(থ) গামা ও বিটা ফাংশনের সম্পর্কটি লিখ।

$$\text{উত্তর : } \beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

(দ) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মান কত?

$$\text{উত্তর : } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

(ধ) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx =$ কত?

$$\text{উত্তর : } \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c$$

(ন) অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল বলতে কী বুঝ?

উত্তর : একটি নির্দিষ্ট যোগজ $\int_a^b f(x) dx$ কে অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল বলা হবে যদি

ইন্টিগ্রালের লিমিট a এবং b এর কমপক্ষে একটি অসীম হয় অথবা যদি $a \leq x \leq b$ ব্যবধির এক বা একাধিক বিন্দুতে ইন্টিগ্রাল $f(x)$ বিচ্ছিন্ন হয়।

(প) রোলের উপপাদ্যটি বর্ণনা কর।

উত্তর : যদি $y = f(x)$ ফাংশনটি $a \leq x \leq b$ বন্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন, $a < x < b$ খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য এবং $f(a) = f(b)$ হয় তাহলে $a < x < b$ খোলা ব্যবধিতে এমন একটি বিন্দু পাওয়া যাবে যেন $f'(c) = 0$ হয়।

(ফ) $\int_0^{2a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ কী শর্তে হবে?

উত্তর : যদি $f(x) = f(2a - x)$ হয় তবে $\int_0^{2a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ হবে।

(ব) পোলার আকারে ds নির্ণয় কর।

$$\text{উত্তর : } ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$$

(ভ) Walle এর সূত্র বর্ণনা কর।

উত্তর : যদি n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে, $I = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$$

$$= \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\dots\dots 5.3.1}{n(n-2)(n-4)\dots\dots 6.4.2} \cdot \frac{\pi}{2}; \text{ যখন } n \text{ জোড় সংখ্যা।}$$

$$= \frac{(n-1)(n-3)\dots\dots 6.4.2}{n(n-2)(n-4)\dots\dots 5.3.1}; \text{ যখন } n \text{ বিজোড় সংখ্যা।}$$

খ-বিভাগ

যে কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও-

৪ × ৫ = ২০

২। (ক) $f(x) = \frac{x}{|x|}$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(খ) নিম্নের ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{যখন } x < 0 \\ x & \text{যখন } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{যখন } 1 < x \end{cases}$$

৩। (ক) মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে $\ln(\cos x)$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।(খ) x এর সাপেক্ষে $x^y + y^x = a^b$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।৪। (ক) $\sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2}$ এর সাপেক্ষে $\tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

(খ) যদি $y^m + y^{-m} = 2x$ হয় তবে দেখাও যে, $(x^2 - 1)y_{n+2} + (2n + 1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$.

৫। (ক) মান নির্ণয় কর: $\lim_{x \rightarrow 0} \cot x \ln \frac{1-x}{1+x}$ (খ) মান নির্ণয় কর: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x \tan^{-1} x - x^2)}{x^6}$ ৬। (ক) সমাকলন কর: $\int \frac{1}{x(1+x^{10})} dx$ অথবা, $\int \frac{1}{a \cos x + b \sin x} dx$ (খ) মান নির্ণয় কর: $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{3+2\sin x} dx$ অথবা, $\int_0^{\pi} x \sin x / (1 + \cos^2 x) dx$ ৭। (ক) $\int \cos^n x dx$ এর লঘুকরণ সূত্র প্রতিষ্ঠা কর।(খ) প্রমাণ কর: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ৮। (ক) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} \right]$ এর মান নির্ণয় কর।(খ) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ এর অভিসৃতি পরীক্ষা কর।৯। (ক) $a^2 y^2 = x^2 (a^2 - x^2)$ বক্ররেখার একটি ফাঁসের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।(খ) $r = a(1 + \cos \theta)$ কার্ডিওয়েডের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ-বিভাগ

যে কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও-

১০ × ৫ = ৫০

১০। যদি $y = f(x)$ ফাংশনটি $x = a$ বিন্দুতে অন্তরীকরণযোগ্য হয়। তবে প্রমাণ কর যে, ফাংশনটি ঐ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হবে। উদাহরণ দিয়ে দেখাও যে, একটি ফাংশন কোনো বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হলেও ঐ বিন্দুতে অন্তরীকরণযোগ্য নাও হতে পারে।

১১। লিবনীজের উপপাদ্যটি বর্ণনাসহ প্রমাণ কর।

১২। $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$ ফাংশনের গরিষ্ঠমান ও লঘিষ্ঠমান নির্ণয় কর।

১৩। ল্যাগ্রাঞ্জ আকারের অবশেষসহ টেলর উপপাদ্যটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর।

১৪। ইন্টিগ্রাল ক্যালকুলাসের মৌলিক উপপাদ্যটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর।

১৫। $y^2 = 4x$ অধিবৃত্তের $y = 8x - 1$ রেখাটির দ্বারা ছেদকৃত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১৬। $27ay^2 = 4(x - 2a)^3$ এবং $y^2 = 4ax$ বক্ররেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রদ্বারা আবর্তিত
ঘনকের ঘনমান নির্ণয় কর।