

## বিএসসি (অনার্স) প্রথম বর্ষ পরীক্ষা-২০১৩

## ক্যালকুলাস-১

বিষয় কোড : ২১৩৭০৩

ক-বিভাগ

১। যেকোনো ১০ টি প্রশ্নের উত্তর দাও-

১ × ১০ = ১০

(ক)  $y = \sqrt{1-x}$  ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।উত্তর : ডোমেন  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\} = (-\infty, 1]$ রেঞ্জ  $R_f = [0, \infty)$ (খ)  $y = u^v$  হলে (যেখানে  $u$  ও  $v$ ,  $x$  এর ফাংশন)  $\frac{dy}{dx} = ?$ উত্তর :  $y = u^v$  $\Rightarrow \ln y = \ln u^v$  $\Rightarrow \ln y = v \ln u$  $\therefore \frac{dy}{dx} = u^v \left( \frac{v}{u} \frac{du}{dx} + \ln u \frac{dv}{dx} \right)$ (গ)  $(\delta - \epsilon)$  এর সাহায্যে ফাংশনের সীমার সংজ্ঞা দাও।উত্তর : যদি প্রত্যেক  $\epsilon > 0$  এর জন্য  $\delta$  এর উপর নির্ভরশীল অপর একটি সংখ্যা  $\delta > 0$ বিদ্যমান থাকে যেন,  $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$  হয়,  $l$  কে  $f(x)$  এর সীমা বলাহয় এবং একে  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  দ্বারা প্রকাশ করা হয়।(ঘ) কোন বিন্দুগুলোতে  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন?উত্তর : শুধুমাত্র  $x = 0$  বিন্দুতে  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন।(ঙ)  $x$  এর সাপেক্ষে  $y = \cos x$  এর ১০০ তম অন্তরক কত?উত্তর :  $y_{100} = \cos\left(\frac{100\pi}{2} + x\right) = \cos(50\pi + x) = \cos x$ 

(চ) অপ্রকৃত যোগজ বলতে কী বুঝ?

উত্তর : একটি নির্দিষ্ট যোগজ  $\int_a^b f(x)dx$  কে অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল বলা হবে যদিইন্টিগ্রালের লিমিট  $a$  এবং  $b$  এর কমপক্ষে একটি অসীম হয় অথবা যদি  $a \leq x \leq b$  ব্যবধির এক বা একাধিক বিন্দুতে ইন্টিগ্রাল  $f(x)$  বিচ্ছিন্ন হয়।(ছ)  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$  কী শর্তে হবে?উত্তর : যদি  $f(x)$  ফাংশন জোড় হয় অর্থাৎ  $f(x) = f(-x)$  হয়।

(জ) Wallis এর সূত্র বর্ণনা কর।

উত্তর : যদি  $n$  ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে,  $I = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$  $= \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$  $= \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\dots 5.3.1}{n(n-2)(n-4)\dots 6.4.2} \cdot \frac{\pi}{2}$ ; যখন  $n$  জোড় সংখ্যা। $= \frac{(n-1)(n-3)\dots 6.4.2}{n(n-2)(n-4)\dots 5.3.1}$ ; যখন  $n$  বিজোড় সংখ্যা।

(ঝ) ইনফ্লেকশন বিন্দু কী?

উত্তর : যদি  $f(x)$  ফাংশন  $x_0$  বিন্দুকে ধারণকারী কোনো খোলা ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন হয় এবং ঐ বিন্দুতে  $f(x)$  এর অবতলতার দিক পরিবর্তিত হয় তবে  $x_0$  কে  $f(x)$  এর ইনফ্লেকশন বিন্দু বলে।(ঞ)  $\int \frac{f'(x) dx}{f(x)}$  এর মান নির্ণয় কর।উত্তর :  $\int \frac{f'(x) dx}{f(x)} = \ln |f(x)| + c$ (ট)  $\Gamma(m) \Gamma(1-m)$  এর মান কত?উত্তর :  $\Gamma(m) \Gamma(1-m) = \frac{\pi}{\sin m\pi}$ 

(ঠ) তৃতীয় শ্রেণির অপ্রকৃত যোগজের একটি উদাহরণ দাও।

উত্তর : (i)  $\int_0^{\infty} \frac{e^x}{x-2} dx$

(ii)  $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$

(iii)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$

খ-বিভাগ

যে কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও-

৪ × ৫ = ২০

২।  $f(x) = \begin{cases} 1-x, & -1 \leq x < 1 \\ 0, & 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4, & x > 2 \end{cases}$ , ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।

৩। মূল নিয়মে  $y = \sin^{-1}x$  এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

৪।  $\cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = \ln\left(\frac{x}{n}\right)^n$  হলে, প্রমাণ কর যে,  $x^2 y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + 2n^2 y_n = 0$

৫।  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{na} + \frac{1}{na+1} + \frac{1}{na+2} + \dots + \frac{1}{nb} \right]$  এর মান নির্ণয় কর।

৬।  $x$  অক্ষরেখা এবং  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  সাইক্লোয়েডের দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৭।  $x$  এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ কর :

(i)  $y = \tan \ln \sin(e^{x^2})$

(ii)  $y = \cos^{-1}(1 - 2x^2)$

৮।  $\ln x$  কে  $x - 2$  এর শক্তিস্থায় বিস্তার কর।

৯।  $\int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$  অপ্রকৃত যোগজটির অভিসৃতি পরীক্ষা কর।

উত্তর সংকেত : অধ্যায়-৪(A)-এর সমস্যা-৯(iii)।

গ-বিভাগ

যে কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও-

১০ × ৫ = ৫০

১০। যদি  $y = f(x)$  ফাংশনটি  $x = a$  বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়, তবে প্রমাণ কর যে, এই বিন্দুতে

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  বিদ্যমান। উদাহরণ দাও যে,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  বিদ্যমান থাকলেও ঐ বিন্দুতে

ফাংশন অবিচ্ছিন্ন নাও হতে পারে।

১১।  $y = f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$  ফাংশনটি কোন ব্যবধিতে হ্রাস পায়, কোন ব্যবধিতে বৃদ্ধি পায়, কোন ব্যবধিতে অবতল ও কোন ব্যবধিতে উত্তল তা নির্ণয় কর।  $y$  এর আপেক্ষিক গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় কর।  $f(x)$  ছুঁচিহ্ন আঁক।

১২। যোগজ ক্যালকুলাসের মৌলিক উপপাদ্য বর্ণনা ও প্রমাণ কর।

১৩।  $y = \sqrt{4 - x^2}$ ,  $y = x$  এবং  $y$  অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ এলাকাটি  $y$  অক্ষ বরাবর আবর্তনের সৃষ্ট ঘনবস্তুর এলাকার শেলের সাহায্যে আয়তন নির্ণয় কর।

১৪। ১ম গড়মান উপপাদ্য বর্ণনা ও প্রমাণ কর। উপপাদ্যটির জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দাও।

১৫। অনির্ণেয় আকার  $\frac{0}{0}$  এর জন্য এল. হসপিটালের নিয়ম বর্ণনা ও প্রমাণ কর। উক্ত নিয়ম

প্রয়োগে  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$  এর মান নির্ণয় কর।

১৬। যদি  $I_{p,q} = \int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x dx$  হয় তবে প্রমাণ কর যে,  $I_{p,q} = \frac{p-1}{p+q} I_{p-2,q}$  এটা

থেকে  $\int_0^{\pi/2} \sin^8 x \cos^2 x dx$  এর মান নির্ণয় কর।

১৭।  $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$  হাইপোসাইক্লয়েডটির পরিসীমা নির্ণয় কর।