

বিএসসি (অনার্স) প্রথম বর্ষ পরীক্ষা-২০১৪

ক্যালকুলাস-১

বিষয় কোড : ২১৩৭০৩

ক-বিভাগ

১। যেকোনো ১০ টি প্রশ্নের উত্তর দাও-

১ × ১০ = ১০

(ক) এক এক ফাংশন বর্ণনা কর।

উত্তর : যদি $f: X \rightarrow Y$ একটি ফাংশন হয়, তাহলে f কে এক-এক বলা হবে যদি $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y; \forall x, y \in X$

(খ) সার্বিক ফাংশন কী?

উত্তর : $f: A \rightarrow B$ ফাংশনটিকে সার্বিক বলা হবে যদি $f(A) = B$ হয়। অর্থাৎ কোডোমেন ও রেঞ্জ সমান।

(গ) $y = \sqrt{16 - x^2}$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ কত?উত্তর : ডোমেন $D_f = \{x \in \mathbb{R} : -4 \leq x \leq 4\}$ রেঞ্জ $R_f = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 4\}$ (ঘ) $f(a)$ এবং $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ বলতে কী বুঝ?

উত্তর : $f(a)$ এবং $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ এক নয়। $f(a)$ দ্বারা $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের মান বুঝায় এবং $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ দ্বারা $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর সীমাস্থ মান বুঝায়।

(ঙ) একটি ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতার শর্ত কী?

উত্তর : কোনো ফাংশন $f(x)$ কে একটি নির্দিষ্ট ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন বলা হয় যদি এবং কেবল যদি ঐ ফাংশনটি ব্যবধির সকল বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়।

(চ) $y = f(x)$ বক্ররেখার (x, y) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ লিখ।উত্তর : অভিলম্বের সমীকরণ, $X - x + \frac{dy}{dx} (Y - y) = 0$

(ছ) একটি ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য, ইহা কী অবিচ্ছিন্ন?

উত্তর : সকল অন্তরীকরণযোগ্য ফাংশন অবিচ্ছিন্ন কিন্তু বিপরীত উক্তি সত্য নয়।

(জ) ফাংশনের গরিষ্ঠ মানের শর্ত কী?

উত্তর : $x = c$ বিন্দুতে $f(x)$ এর গরিষ্ঠমান বিদ্যমান থাকবে। যদি $f(c + h) < f(c)$ হয় সমান $h \rightarrow 0$

(ঝ) সন্ধি বিন্দু বলতে কী বুঝায়?

উত্তর : পর পর ক্রমবর্ধমান বা ক্রমহ্রাসমান অংশের মিলনকে সন্ধি বিন্দু বলে। অর্থাৎ যে সকল বিন্দুতে $f'(x) = 0$ অথবা $f'(x)$ বিদ্যমান নাই সে সকল বিন্দুকে $f(x)$ ফাংশনের সন্ধি বিন্দু বলে।

(ঞ) কোন শর্তে $\int_0^{na} f(x) dx = n \int_0^a f(x) dx$ হবে?উত্তর : যদি $f(a + x) = f(x)$ হয় তবে $\int_0^{na} f(x) dx$

$$= n \int_0^a f(x) dx.$$

(ট) যদি $y = x^{n+1}$ হয় তবে $y_n = ?$ উত্তর : $y_n = \frac{(x+1)!}{(n+1-n)!} x^{(x+1)-n} = x(n+1)!$ (ঠ) (a, b) ব্যবধিতে $y = f(x)$ বক্ররেখার চাপ দৈর্ঘ্যের সূত্র লিখ।উত্তর : চাপ দৈর্ঘ্যের সূত্র : $\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$

খ-বিভাগ

যে কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও-

৪ × ৫ = ২০

২। $f(x) = \frac{\left(\frac{1}{e^x} - e^{-\frac{1}{x}}\right)}{\left(\frac{1}{e^x} + e^{-\frac{1}{x}}\right)}$ ফাংশনটির $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা কর।

৩। সীমার $(\delta - \varepsilon)$ সংজ্ঞার সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$

৪। অন্তরক সহগ নির্ণয় কর : $y = \log_{\cos x}(\tan^2 2x)$

৫। প্রমাণ কর যে, $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ যখন $f(x)$ যুগ্ম ফাংশন।

৬। প্রমাণ কর যে, $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

৭। $y = x^2 + 1$ বক্ররেখার (2, 5) বিন্দুতে স্পর্শক রেখার ঢাল নির্ণয় কর।

৮। $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$ এর অভিসৃতি যাচাই কর।

৯। $\frac{1}{x}$ কে $x - 2$ এর শক্তিতে টেলর ধারা বিস্তৃত কর।

গ-বিভাগ

যে কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও-

১০ × ৫ = ৫০

১০। অন্তরীকরণযোগ্যতা বলতে কী বুঝ? দেখাও যে, $f(x) = |x| + |x-1|$ ফাংশনটি $x = 1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন কিন্তু অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

১১। $y = a \cos(\log x) + b \sin(\log x)$ হলে দেখাও যে, $x^2 y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$

১২। প্রথম গড়মান উপপাদ্য বর্ণনা ও প্রমাণ কর।

১৩। সমাকলন কর :

(ক) $\int \frac{1 - \sin x - \cos x}{1 + \sin x - \cos x} dx$

(খ) $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+4}}$

১৪। মান নির্ণয় কর :

(ক) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + \sin^2 x}$

(খ) $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$

১৫। $\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \left(\frac{y}{2}\right)^3 = 1$ দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বের কর।

১৬। যদি $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n \theta d\theta$ হয় তবে, দেখাও যে, $n(I_{n+1} + I_{n-1}) = 1$ এবং ইহা হতে

$\int_0^{\pi/4} \tan^6 \theta d\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

১৭। (0, 9) ব্যবধিতে $f(x) = x^3 - 18x^2 + 96x$ ফাংশনটির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর।