

বিএসসি (অনার্স) প্রথম বর্ষ পরীক্ষা-২০১৬

ক্যালকুলাস-১

বিষয় কোড : ২১৩৭০৩

ক-বিভাগ

১। যেকোনো ১০ টি প্রশ্নের উত্তর দাও-

১ × ১০ = ১০

(ক) একটি ফাংশন কখন বিপরীতযোগ্য হয়?

উত্তর : যদি কোনো ফাংশন একই সঙ্গে এক এক ও সার্বিক হয় অর্থাৎ বাইজেকটিভ হয় তবে ফাংশনটি বিপরীতযোগ্য হবে।

(খ) ফাংশন $f(x) = \sin x$ এর রেঞ্জ কী হবে?উত্তর : $f(x) = \sin x$ এর রেঞ্জ, $R_f = [-1, 1]$.(গ) জ্যামিতিকভাবে $\frac{dy}{dx}$ কী নির্দেশ করে?

উত্তর : যদি কোনো বক্ররেখা $y = f(x)$ এর উপর অবস্থিত $p(x,y)$ বিন্দুর সম্পর্ক x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে তবে, $\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$ । এখানে, $\frac{dy}{dx}$ কে বলা হয় স্পর্শকের ঢাল।

(ঘ) e^x কে \sqrt{x} এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ কর।উত্তর : $\frac{d}{d(\sqrt{x})} (e^x) = 2\sqrt{x}e^x$.(ঙ) $x = a$ বিন্দুতে একটি ফাংশন $f(x)$ এর গরিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান থাকার প্রয়োজনীয় শর্ত কী?উত্তর : $f(x)$ ফাংশনের গরিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান থাকার প্রয়োজনীয় শর্ত ঐ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 0$ (চ) $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx$ এর সমাকলন কত?উত্তর : ধরি, $I = \int \frac{g'(x) dx}{g(x)}$ এবং $g(x) = z$ বা, $I = \int \frac{dz}{z} \therefore g'(x) dx = dz$ বা, $I = \ln |z| + c$

$$\therefore \int \frac{g'(x) dx}{g(x)} = \ln |g(x)| + c$$

(ছ) $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ কী শর্তে হবে?উত্তর : যদি $f(x)$ বেজোড় বা অযুগ্ম ফাংশন হয় তবে $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ হবে।(জ) $\left(\frac{3}{2}\right)$ এর মান কত?উত্তর : $\left(\frac{3}{2}\right) = \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right| \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{2} \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right| \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (Ans.)

(ঝ) অপ্রকৃত সমাকলনের অভিসারিতা বলতে কী বুঝ?

উত্তর : ধরি, L একটি নির্দিষ্ট সসীম বাস্তব সংখ্যা। এখন অপ্রকৃত যোগজ $\int_a^b f(x) dx$ কে L বিন্দুতে অভিসারী বলা হবে যদি অতি ক্ষুদ্র সংখ্যা $\epsilon > 0$ এর জন্য একটি ধনাত্মক সংখ্যা M বিদ্যমান থাকে যেন,

$$\forall x \geq M \Rightarrow \left| L - \int_a^b f(x) dx \right| < \epsilon.$$

(ঞ) $y = f(x)$ বক্ররেখার $[a, b]$ ব্যবধিতে চাপ দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের সমাকলন সূত্র লিখ।উত্তর : $y = f(x)$ বক্ররেখার $[a, b]$ ব্যবধিতে চাপদৈর্ঘ্য নির্ণয়ের সমাকলন সূত্র :

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

(ট) এস্ট্রিয়ড-এর সমীকরণটি লিখ।

উত্তর : এস্ট্রিয়ড-এর সমীকরণটি হলো- $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

খ-বিভাগ

যে কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও-

৪ × ৫ = ২০

২। লিমিটের $(\delta - \epsilon)$ সংজ্ঞা ব্যবহার করে দেখাও যে, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$.৩। $f(x) = |x| + |x - 1|$ ফাংশনের লেখচিত্র আঁক। ইহার ডোমেন নির্ণয় কর।৪। $y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।৫। $y = \sin bx + \cos bx$ হলে দেখাও যে, $y_n = b^n \{1 + (-1)^n \sin 2bx\}^{\frac{1}{2}}$ ৬। সমাকলন কর : $\int \frac{e^x}{x} (1 + x \ln x) dx$.৭। মান নির্ণয় কর : $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ ৮। দেখাও যে, $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\pi}$ ৯। কার্ডিওয়েড $r = c(1 - \cos\theta)$ এর পরিসীমা বের কর।

গ-বিভাগ

যে কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও-

১০ × ৫ = ৫০

১০। $x = a$ বিন্দুতে একটি ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতার সংজ্ঞা দাও। একটি ফাংশন নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত হলো।

$$f(x) = \begin{cases} 3 + 2x & \text{যখন } -\frac{3}{2} \leq x < 0 \\ 3 - 2x & \text{যখন } 0 \leq x < \frac{3}{2} \\ -3 - 2x & \text{যখন } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনটির অবিচ্ছিন্নতা এবং $x = \frac{3}{2}$ বিন্দুতে ইহার অন্তরীকরণ যোগ্যতা আলোচনা কর।

১১। অনির্ণেয় $\frac{0}{0}$ আকার বলতে কী বুঝ? লা পিটাল এর সর্বজনীন আকার বর্ণনা কর। লাপিটাল নিয়ম ব্যবহার করে $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin^{-1}x}{\sin^3 x}$ এর মান নির্ণয় কর।

১২। ল্যাগ্রাঞ্জ আকারে গড়মান উপপাদ্যটি বর্ণনা এবং ইহা প্রমাণ কর।

১৩। ল্যাগ্রাঞ্জ আকারের অবশেষসহ টেলর উপপাদ্যটি বর্ণনা কর। এই উপপাদ্য ব্যবহার করে দেখাও যে, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5(1+z)^5}$, যেখানে $0 < z < x$.

১৪। দেখাও যে, $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x$ ফাংশনের $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে গরিষ্ঠ মান, $x = 1$ বিন্দুতে লঘিষ্ঠ মান এবং $x = \frac{3}{4}$ বিন্দুটি ইনফ্লেকশন বিন্দু।১৫। যদি $y = (x^2 - 1)^n$ হয়, তবে দেখাও যে, $(x^2 - 1) y_{n+2} + 2xy_{n+1} + n(n+1)y_n =$ ০. আরও দেখাও যে, $\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{du}{dx} \right\} + n(n+1)u = 0$, যেখানে $u =$ $\frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$.১৬। $I_n = \int_0^{\pi/2} x \sin^n x dx$ এর লঘুকরণ সূত্রটি নির্ণয় কর।অতঃপর প্রমাণ কর যে, $I_5 = \frac{149}{225}$

১৭। $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তকে x -অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন ও তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।