বিএসসি (অনার্স) প্রথম বর্ষ পরীক্ষা-২০১৭

ক্যালকুলাস-১

বিষয় কোড : ২১৩৭০৩

ক-বিভাগ

১। যেকোনো ১০ টি প্রশ্নের উত্তর দাও- **১ × ১০ = ১০**

(ক) ফাংশনের সংজ্ঞা দাও।

[Define function.]

উত্তর : যদি x এবং y দুইটি অশূন্যক সেট এবং f এরূপ একটি নিয়ম হয় যে প্রত্যেক $x \in X$ এর জন্য একটি অনন্য $y \in Y$ পাওয়া যায় তবে f কে X সেট হতে Y সেটে একটি ফাংশন বলে।

(খ) একটি সার্বিক ফাংশনের উদাহরণ দাও।

[Give an example of an on to function.]

উত্তর : $f(x) = x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \nabla \to \nabla$ একটি সার্বিক ফাংশন।

(গ) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ **ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর।**

[Find the domain of the function $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$]

উত্তর : এখানে $1 - x > 0$ বা $x < 1$ এর জন্য কেবলমাত্র $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore D_f = \{x : x < 1\}$

$= (-\infty, 1)$

(ঘ) সীমার $(\varepsilon - \delta)$ সংজ্ঞা দাও।

[Give the $(\varepsilon - \delta)$ definition of limit.]

উত্তর : m কে ফাংশন $f(x)$ এর সীমা বলা হবে, যদি চলক x উভয় দিক হতে নির্দিষ্ট সংখ্যা a এর দিকে অগ্রসর হয়ে যদি এবং কেবল যদি $\delta > 0$ এর জন্য এর উপর নির্ভরশীল ক্ষুদ্র মানের ধনাত্মক $\varepsilon > 0$ পাওয়া যায় যেন $|f(x) - m| < \delta$, যখন $0 < |x - a| < \varepsilon$ হয়।

(ঙ) $x = x_0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা শর্তটি কী?

[What is the condition of continuity of the function $f(x)$ at $x = x_0$?]

উত্তর : কোন ফাংশন $f(x)$ কে $x = x_0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন বলা হয় যদি $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ও $f(x_0)$ বিদ্যমান এবং $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ হয়।

(চ) $y = x^{150}$ **হলে,** $y_{110} = ?$

[If $y = x^{150}$ then $y_{110} = ?$]

উত্তর : $y_{110} = \frac{150!}{(150-110)!} x^{150-110} = \frac{150!}{40!} x^{40}$

(ছ) $y = f(x)$ ফাংশনের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণটি লিখ।

[Write the equation of the tangent of $f(x)$ at (x_1, y_1)]

উত্তর : $y = f(x)$ বক্ররেখার স্পর্শকের উপর যে কোনো বিন্দু (x,y) হলে বক্ররেখার (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)$।

(জ) অনির্ণেয় আকার সম্পর্কে L. Hospital এর নিয়ম বর্ণনা কর।

[State L. Hospital rule about indeterminate form.]

উত্তর : L.Hospital এর নিয়ম : যদি কোন ব্যবধির $x = a$ বিন্দুতে

(i) $f(x)$ ও $g(x)$ ফাংশন দুইটি টেইলর ধারায় বিস্তারযোগ্য হয়।

(ii) $f(a) = g(a) = 0$ হয় এবং

(iii) $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ বিদ্যমান থাকে তবে $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(a)}{g'(a)}$

(ঝ) $\int_0^{২ধ} f(x)\,dx = 2\int_0^{২ধ} f(x)\,dx$ **হবে কী শর্তে?**

[What is the condition for $\int_0^{২ধ} f(x)\,dx = 2\int_0^{ধ} f(x)\,dx$?]

উত্তর : যদি $f(x) = f(2a - x)$ হয় তবে $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx$ হবে।

(ঞ) বিটা ফাংশনের সংজ্ঞা দাও।

[Define Beta function.]

উত্তর : $m, n > 0$ হলে $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$ কে বিটা ফাংশন বলে। একে $\beta(m, n)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$\because \beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$

(ট) অপ্রকৃত ইন্টিগ্র্যালের সংজ্ঞা দাও।
[Define improper integral.]

উত্তর : একটি নির্দিষ্ট যোগজ $\int_a^b f(x)dx$ কে অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল বলা হবে যদি ইন্টিগ্রালের লিমিট a এবং b এর কমপক্ষে একটি অসীম হয় অথবা যদি $a \le x \le b$ ব্যবধির এক বা একাধিক বিন্দুতে ইন্টিগ্রাল f(x) বিচ্ছিন্ন হয়।

(ঠ) [a, b] ব্যবধিতে $y = f(x)$ ফাংশনের চাপ দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের সূত্রটি লিখ।
[Write the formula of arc length of $f(x)$ for the interval (a, b).]

উত্তর : চাপ দৈর্ঘ্যের সূত্র : $\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$

খ-বিভাগ

যেকোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও– **৩ × ৫ = ১৫**

২। $f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{যখন } x < 0 \\ 1+\sin x & , \text{যখন } 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ 2+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 & , \text{যখন } x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ফাংশনের $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে অন্তরীকরণ যোগ্যতা যাচাই কর।

[Test the differentiability of the following function at $x = \frac{\pi}{2}$ $f(x) = \begin{cases} 1 \\ \text{when } x < 0 \\ 1+\sin x \\ \text{when } 0 \le x < \frac{\pi}{2}] \\ 2+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 \\ \text{when } x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$

৩। x এর সাপেক্ষে $\log_a x + \log_x a$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।
[Find the derivative of $\log_a x + \log_x a$ w.r. to x.]

৪। $y = 3x^2 - 2x - 4$ বক্ররেখার যেসকল বিন্দুতে স্পর্শকটি $x + 10y - 7 = 0$ রেখার উপর লম্ব সেসকল বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
[Find the coordinates of the points where the tangent of the curve $y = 3x^2 - 2x - 4$ are perpendicular to the line $x + 10y - 7 = 0$.]

৫। $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ ফাংশনটির বৃদ্ধিপ্রাপ্ত ও হ্রাসপ্রাপ্ত ব্যবধি নির্ণয় কর।
[Find the intervals where the function $f(x) = x^3 - 6x^3 + 9x\ 5$ is increases and decreases.]

৬। সমাকলন কর : $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{4x+3}}$ [Integrate : $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{4x+3}}$]

৭। মান নির্ণয় কর : $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx$. [Evaluate : $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx$.]

৮। $\int \sec^n x\,dx$ এর লঘুকরণ সূত্র নির্ণয় কর। [Find the reduction formula of $\int \sec^n x\,dx$]

৯। $\int_0^১ \frac{\text{ফা}}{\text{ক}+\sqrt{\text{ক}}}$ এর অভিসারিতা যাচাই কর। [Test the convergence of $\int_0^১ \frac{\text{ফা}}{\text{ক}+\sqrt{\text{ক}}}$]

গ-বিভাগ

যে কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও– **৭ × ৫ = ৩৫**

১০। $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & , \text{যখন } x < 0 \\ x & , \text{যখন } 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{যখন } 1 < x \end{cases}$ ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

[Sketch $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{When } x<0 \\ x & \text{When } 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{x} & \text{When } 1<x \end{cases}$ Also find the domain and range of the given function.]

১১। (ক) $y = \sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ হলে, দেখাও যে, $\frac{dy}{dx} = \pm\frac{2}{1+x^2}$

[(a) If $y = \sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$, then show that, $\frac{dy}{dx} = \pm\frac{2}{1+x^2}$]

(খ) $\sin^{-1}x$ এর সাপেক্ষে $x^{\sin^{-1}x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

[(b) Find the derivative of $x^{\sin^{-1}x}$ w. r. to $\sin^{-1}x$.]

১২। লিবনিজ উপপাদ্য বর্ণনা কর এবং এর সাহায্যে দেখাও যে, $(1-x^2)\,y_{n+2} - (2n+1)\,xy_{n+1} + (m^2-n^2)y_n = 0$ যেখানে, $y = \sin(m\sin^{-1}x)$.

[State Leibnitz theorem and use it to show that. $(1-x^2)\,y_{n+2} - (2n+1)\,xy_{n+1} + (m^2-n^2)y_n = 0$ where $y = \sin(m\sin^{-1}x)$.]

১৩। রোলের উপপাদ্য ও ল্যাগ্রাঞ্জের গড়মান উপপাদ্য বর্ণনা কর। $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ব্যবধিতে $f(x) = x(x-1)(x-2)$ ফাংশনের জন্য ল্যাগ্রাজের গড়মান উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই কর।

[State Rolle's theorem and Lagranges mean value theorem. Test the applicability of Lagranges mean value theorem for the function $f(x) = x(x-1)(x-2)$ in the interval $\left[0, \frac{1}{2}\right]$]

১৪। সমাকলন কর : (i) $\int \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\,dx$; (ii) $\int \frac{dx}{\sin 2x - \sin x}$

[Integrate : (i) $\int \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\,dx$; (ii) $\int \frac{dx}{\sin 2x - \sin x}$]

১৫। মান নির্ণয় কর : (i) $\int_0^{১/২} \frac{\text{ফী}}{(১-\text{ইী}^২)\sqrt{১-\text{ী}^২}}$; (ii) $\int_0^{\pi/৪} \ln(1+\tan\theta)\,d\theta$.

[Evaluate : (i) $\int_0^{২/২} \frac{\text{ফী}}{(১-\text{ইী}^২)\sqrt{১-\text{ী}^২}}$; (ii) $\int_0^{\pi/৪} \ln(1+\tan\theta)\,d\theta$.]

১৬। প্রমাণ কর যে, $\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ [Prove that , $\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$]

১৭। $r = a(1+\cos\theta)$ কার্ডিঅয়েড দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[Find the area bounded by the Cardioid $r = a(1+\cos\theta)$.]