

## বিএসসি (অনার্স) প্রথম বর্ষ পরীক্ষা-২০১৮

## ক্যালকুলাস-১

বিষয় কোড : ২১৩৭০৩

সময় : ৩ ঘণ্টা

পূর্ণমান : ৬০

[দ্রষ্টব্য : একই বিভাগের বিভিন্ন প্রশ্নের উত্তর ধারাবাহিকভাবে লিখতে হবে।]

## ক-বিভাগ

১। যেকোনো ১০টি প্রশ্নের উত্তর দাও-

১ × ১০ = ১০

(ক) এক-এক ফাংশন বর্ণনা কর।

[Define one-one function.]

উত্তর : যদি  $f: X \rightarrow Y$  একটি ফাংশন হয়, তাহলে  $f$  কে এক-এক বলা হবে যদি  $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y; \forall x, y \in X$ (খ)  $y = \sqrt{16 - x^2}$  ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ কত?[What is the domain and range of the function  $y = \sqrt{16 - x^2}$ ?]উত্তর : ডোমেন  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : -4 \leq x \leq 4\}$ রেঞ্জ  $R_f = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 4\}$ (গ)  $f(a)$  এবং  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  বলতে কী বুঝ?[What do you mean by  $f(a)$  and  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ?]উত্তর :  $f(a)$  এবং  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  এক নয়।  $f(a)$  দ্বারা  $x = a$  বিন্দুতে  $f(x)$  ফাংশনের মানবুঝায় এবং  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  দ্বারা  $x = a$  বিন্দুতে  $f(x)$  এর সীমাস্থ মান বুঝায়।(ঘ) জ্যামিতিকভাবে  $\frac{dy}{dx}$  কী নির্দেশ করে?[What is  $\frac{dy}{dx}$  in geometrically?]উত্তর : যদি কোনো বক্ররেখা  $y = f(x)$  এর উপর অবস্থিত  $p(x, y)$  বিন্দুর সম্পর্ক  $x$ অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে  $\alpha$  কোণ উৎপন্ন করে তবে,  $\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$ ।এখানে,  $\frac{dy}{dx}$  কে বলা হয় স্পর্শকের ঢাল।(ঙ)  $y = f(x)$  বক্ররেখার  $(x, y)$  বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ লিখ।[What is the equation of the normal of the curve  $y = f(x)$  at the point  $(x, y)$ ?]উত্তর : অভিলম্বের সমীকরণ,  $X - x + \frac{dy}{dx} (Y - y) = 0$ ।

(চ) সন্ধি বিন্দু বলতে কী বুঝায়?

[What do you mean by critical point?]

উত্তর : পর পর ক্রমবর্ধমান বা ক্রমহ্রাসমান অংশের মিলনকে সন্ধি বিন্দু বলে। অর্থাৎ যে সকল বিন্দুতে  $f'(x) = 0$  অথবা  $f'(x)$  বিদ্যমান নাই সে সকল বিন্দুকে  $f(x)$  ফাংশনের সন্ধি বিন্দু বলে।(ছ) যদি  $y = x^{n+1}$  হয় তবে  $y_n = ?$ [If  $y = x^{n+1}$  then  $y_n = ?$ ]উত্তর :  $y_n = \frac{(x+1)!}{(n+1-n)!} x^{(x+1)-n} = x(n+1)!$ (জ)  $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx =$  কত?[ $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx =$  What?]উত্তর :  $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c$ (ঝ)  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$  কী শর্তে হবে?[What is the condition for  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$  .]উত্তর : যদি  $f(x)$  ফাংশন জোড় হয় অর্থাৎ  $f(x) = f(-x)$  হয়।

(ঞ) অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল বলতে কী বুঝ?

[What do you mean by improper integral?]

উত্তর : একটি নির্দিষ্ট যোগজ  $\int_a^b f(x)dx$  কে অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল বলা হবে যদি ইন্টিগ্রালের

লিমিট  $a$  এবং  $b$  এর কমপক্ষে একটি অসীম হয় অথবা যদি  $a \leq x \leq b$  ব্যবধির এক বা একাধিক বিন্দুতে ইন্টিগ্রাল  $f(x)$  বিচ্ছিন্ন হয়।

(ট)  $\left(\frac{3}{2}\right)$  এর মান কত? [Find the value of  $\left(\frac{3}{2}\right)$ .]

উত্তর :  $\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt[0]{\left(\frac{1}{2} + 1\right)} = \frac{1}{2} \sqrt[0]{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  (Ans.)

(ঠ) এস্ট্রয়ড এর সমীকরণটি লিখ। [Write down the equation of astroid.]

উত্তর : এস্ট্রয়ড-এর সমীকরণটি হলো-  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ .

খ-বিভাগ

যেকোনো ৫টি প্রশ্নের উত্তর দাও-

৩ × ৫ = ১৫

২। লিমিটের  $(\epsilon - \delta)$  সংজ্ঞা ব্যবহার করে দেখাও যে,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$

[Using the  $(\epsilon - \delta)$  definition of limit to show that  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$

৩।  $f(x) = \frac{x}{x}$  ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

[Find the domain and range of the function  $f(x) = \frac{x}{x}$ .]

৪।  $\sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2}$  এর সাপেক্ষে  $\tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$  এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

[Differentiate  $\tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$  w. r to  $\sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2}$ .]

৫।  $y = x^2 + 1$  বক্ররেখার  $(2, 5)$  বিন্দুতে স্পর্শক রেখার ঢাল নির্ণয় কর।

[Find the slope of tangent line to the curve  $y = x^2 + 1$  at the point  $(2, 5)$ .]

৬।  $\int \cos^n x dx$  এর লঘুকরণ কর।

[Find the reduction formula for  $\int \cos^n x dx$ .]

৭।  $\int \frac{e^x}{x} (1 + x \ln x) dx$  সমাকলন কর।

[Integrate :  $\int \frac{e^x}{x} (1 + x \ln x) dx$

৮। প্রমাণ কর যে,  $\int_0^x e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . [Prove that  $\int_0^x e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .]

৯। কার্ডিওয়েড  $r = c(1 - \cos\theta)$  এর পরিসীমা বের কর।

[Find the perimeter of the cardioid  $r = c(1 - \cos\theta)$ .]

গ-বিভাগ

যেকোনো ৫টি প্রশ্নের উত্তর দাও-

৫ × ১০ = ৫০

১০। একটি ফাংশন নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত হলো :

$$f(x) = \begin{cases} 3 + 2x & \text{যখন } -\frac{3}{2} \leq x < 0 \\ 3 - 2x & \text{যখন } 0 \leq x < \frac{3}{2} \\ -3 - 2x & \text{যখন } x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \quad x = 0 \text{ এবং } x = \frac{3}{2} \text{ বিন্দুতে ইহার}$$

অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা কর।

[A function  $f(x)$  is defined as follows :

$$f(x) = \begin{cases} 3 + 2x & \text{when } -\frac{3}{2} \leq x < 0 \\ 3 - 2x & \text{when } 0 \leq x < \frac{3}{2} \\ -3 - 2x & \text{when } x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{Discuss the differentiability of the}$$

function at  $x = 0$  and  $x = \frac{3}{2}$ .]

১১। লিবনিজের উপপাদ্যটি বর্ণনাসহ প্রমাণ কর।  
[State and prove Leibnitz theorem.]

১২।  $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$  ফাংশনের গরিষ্ঠ মান ও লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় কর।  
[Find the maximum and minimum values of the function  $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$ .]

১৩। ল্যাগ্রাঞ্জ আকারের অবশেষসহ টেলর উপপাদ্যটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর।  
[State and prove Taylor's theorem with Lagrange's form of remainder.]

১৪। ইন্টিগ্রাল ক্যালকুলাসের মৌলিক উপপাদ্যটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর।  
[State and prove the fundamental theorem of integral calculus.]

১৫। মান নির্ণয় কর [Evaluate] :

$$(ক) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

$$(খ) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + 2 \sin x}$$

১৬। যদি  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^n \theta d\theta$  হয় তবে দেখাও যে,  $n(I_{n+1} + I_{n-1}) = 1$  এবং ইহা হইতে  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^6 \theta d\theta$  এর মান নির্ণয় কর।

[If  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^n \theta d\theta$  then show that,  $n(I_{n+1} + I_{n-1}) = 1$  and from this find

the value of  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^6 \theta d\theta$ .]

১৭।  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  উপবৃত্তকে  $x$  অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন ও তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[Find the volume and surface area of the solid generated by revolving the ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  about  $x$  axis.]