

জাতীয় বিশ্ববিদ্যালয় পরীক্ষা-২০১৯

বিএসসি অনার্স ১ম বর্ষ বিষয় : গণিত

কোর্স শিরোনাম : ক্যালকুলাস-১ কোর্স কোড : ২১৩৭০৩

সময় : ৪ ঘণ্টা

পূর্ণমান : ৬০

বিশেষ দৃষ্টব্য : প্রতিটি বিভাগের বিভিন্ন প্রশ্নের উত্তর ধারাবাহিকভাবে লিখতে হবে।

ক-বিভাগ

১। যেকোনো ১০টি প্রশ্নের উত্তর দাও-

১ × ১০ = ১০

(ক) $f(x) = \ln x$ এর ডোমেন কত?উত্তর : ডোমেন $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ (খ) $f(x) = e^x$ এর বিপরীত ফাংশনটি লিখ।উত্তর : $f(x) = e^x$ এর বিপরীত ফাংশনটি $g(x) = \ln x$.

(গ) ফাংশনের অন্তরীকরণযোগ্যতার সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : কোনো বিন্দুতে ফাংশনের বাম অন্তরজ ও ডান অন্তরজ বিদ্যমান ও সমান হলে ঐ বিন্দুতে ফাংশনকে অন্তরীকরণযোগ্য বলে। অর্থাৎ $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ কে অন্তরীকরণযোগ্য বলা হবে যদি $Lf'(a) = Rf'(a)$ হয়।

(ঘ) অবশেষসহ টেইলরের ধারাটি লিখ।

উত্তর : যদি $x=a$ শ্রেফিতে $f(x)$ এর n তম টেলর বহুপদী $P_n(x)$ হয় তবে $f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$ কে অবশেষসহ টেলর উপপাদ্য বা সসীম ধারায় টেলর উপপাদ্য বলে। এখানে $R_{n+1}(x)$ ধারার $(n+1)$ সংখ্যক পদের পর অবশেষ। সাধারণভাবে টেলর এর সসীম ধারাটিকে $f(x) = P_{n-1}(x) + R_n(x)$ লেখা হয়।

(ঙ) ক্রমবর্ধমান এবং ক্রমহ্রাসমান ফাংশনের সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : ক্রমহ্রাসমান ফাংশন : যদি x এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে $f(x)$ এর মান হ্রাস পায় তবে $f(x)$ কে ক্রমহ্রাসমান ফাংশন বলা হয়।ক্রমবর্ধমান ফাংশন : যদি x এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে $f(x)$ এর মানও বৃদ্ধি পায় তবে $f(x)$ কে ক্রমবর্ধমান ফাংশন বলা হয়।

(চ) গামা ফাংশন এবং বিটা ফাংশনের মধ্যে সম্পর্কটি লিখ।

উত্তর : $\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ (ছ) পোলার স্থানাঙ্কে ds^2 কত?উত্তর : পোলার স্থানাঙ্কে $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$.

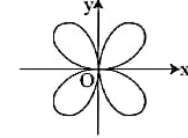
(জ) হাইপারবোলিক কোসাইন ফাংশন কাকে বলে?

উত্তর : $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f: \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty)$ কে হাইপারবোলিক কোসাইন ফাংশন বলে।

(ঝ) ওয়ালির সূত্রটি লিখ।

উত্তর : যদি n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে, $I = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$ $= \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\dots 5.3.1}{n(n-2)(n-4)\dots 6.4.2} \cdot \frac{\pi}{2}$; যখন n জোড় সংখ্যা। $= \frac{(n-1)(n-3)\dots 6.4.2}{n(n-2)(n-4)\dots 5.3.1}$; যখন n বিজোড় সংখ্যা।(ঞ) কী শর্তে $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ হবে?উত্তর : যদি $f(x)$ ফাংশন জোড় হয় অর্থাৎ $f(x) = f(-x)$ হয়।(ট) $r = a \sin 2\theta$ এর খসড়া চিত্র আঁক।উত্তর : $r = a \sin 2\theta$ দ্বারা চারটি ফাঁস নির্দেশিত হয়। নিম্নে

ইহার চিত্র আঁকা হইল :



(ঠ) অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল বলতে কী বুঝ?

উত্তর : একটি নির্দিষ্ট যোগজ $\int_a^b f(x) dx$ কে অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল বলা হবে যদি ইন্টিগ্রালেরলিমিট a এবং b এর কমপক্ষে একটি অসীম হয় অথবা যদি $a \leq x \leq b$ ব্যবধির এক বা একাধিক বিন্দুতে ইন্টিগ্রাল $f(x)$ বিচ্ছিন্ন হয়।

খ-বিভাগ

যেকোনো ৫টি প্রশ্নের উত্তর দাও-

৪ × ৫ = ২০

- ২। $x = 1$ বিন্দুতে $f(x) = |x - 1| + |x - 3|$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতার আলোচনা কর।
- ৩। দেখাও যে, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ বিদ্যমান নয়।
- ৪। দেখাও যে, $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cot x} = 1$ ।
- ৫। $x^2 + 2y^2 = 3$ বক্ররেখার $(1, -1)$ বিন্দুতে উহার স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।
- ৬। $[0, 1]$ ব্যবধিতে $f(x) = (1 + x)(3 - x)$ ফাংশনের জন্য মধ্যমান উপপাদ্যটির সত্যতা যাচাই কর।

৭। দেখাও যে, $\beta(m, n) = \int_0^{\infty} \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}} dy$ ।

৮। $r = a(1 - \cos \theta)$ কার্ডিয়ডের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৯। $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ-বিভাগ

যেকোনো ৫টি প্রশ্নের উত্তর দাও-

৫ × ১০ = ৫০

- ১০। $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 15$ ফাংশনটির লগিষ্ঠ মান, গরিষ্ঠ মান, সন্ধি বিন্দু ও ইনফ্লেকশন বিন্দু নির্ণয় কর।
- ১১। যদি $y = (x^2 - 1)^n$ হয় তবে দেখাও যে, $(x^2 - 1)y_{n+2} + 2xy_{n+1} - n(n+1)y_n = 0$ । আবার $u = \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ হলে দেখাও যে, $\frac{d}{dx} \left\{ (1 - x^2) \frac{du}{dx} \right\} + n(n+1)u = 0$ ।
- ১২। $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ বক্ররেখার যেকোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক এবং অক্ষদ্বয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১৩। $\int \tan^n x dx$ এর লঘুকরণ সূত্রটি নির্ণয় কর এবং $\int \tan^6 x dx$ -এর মান নির্ণয় কর।

১৪। যদি $f(x) = |x - 1| + |x + 3|$ হয়, তবে $x = -3$ ও $x = 1$ বিন্দুতে ফাংশনটির অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণ যোগ্যতা আলোচনা কর।

১৫। দেখাও যে, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x dx = \frac{\left(\frac{p+1}{2}\right) \left(\frac{q+1}{2}\right)}{2 \sqrt{\frac{p+q+2}{2}}}$ ।

১৬। $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ বক্ররেখার পরিসীমার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

১৭। যদি $r = f(\theta)$ বক্ররেখার কোনো বিন্দুতে স্পর্শক ও ব্যাসার্ধ ভেক্টরের অন্তর্গত কোণ ϕ হয়, তবে দেখাও যে, $\tan \phi = r \frac{d\theta}{dr}$, $\sin \phi = r \frac{d\theta}{ds}$ এবং $\cos \phi = \frac{dr}{ds}$, যেখানে s হলো চাপ দৈর্ঘ্য পরামিতি।