

জাতীয় বিশ্ববিদ্যালয় পরীক্ষা-২০২০

বিএসসি অনার্স ১ম বর্ষ বিষয় : গণিত

কোর্স শিরোনাম : Calculus-I

কোর্স কোড : 213703

সময় : ৩ ঘণ্টা

পূর্ণমান : ৬০

বিশেষ দ্রষ্টব্য : প্রতিটি বিভাগের প্রশ্নের উত্তর ধারাবাহিকভাবে লিখতে হবে।

ক-বিভাগ

১। যেকোনো ১০টি প্রশ্নের উত্তর দাও-

১ × ১০ = ১০

(ক) ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। [Define function.]

উত্তর : যদি A ও B দুইটি অশূন্যক সেট হয় এবং f এইরূপ একটি নিয়ম হয় যে, প্রত্যেক $a \in A$ -এর জন্য একটি অনন্য $b \in B$ পাওয়া যায় তবে f কে A সেট হতে B সেটে একটি ফাংশন বলা হয়। ইহাকে $f: A \rightarrow B$ দ্বারা প্রকাশ করতে পারি।

(খ) x এর সাপেক্ষে x^n এর n-তম অন্তরজ কত?[What is the n-th derivative of x^n with respect to x?]

(গ) ধ্রুবক ফাংশন কাকে বলে? [Define a constant function.]

উত্তর : যদি কোনো ফাংশন এমন হয় যে, ডোমেনের সকল মানের জন্য $f(x) = c$ হয়। তবে $f(x)$ কে ধ্রুবক ফাংশন বলে।

(ঘ) অবিচ্ছিন্নতা এবং অন্তরীকরণযোগ্যতার মধ্যে সম্পর্ক লেখ।

[What is the relation between continuity and differentiability?]

উত্তর : $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য হলে ঐ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন হবে।

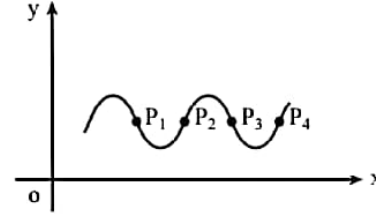
(ঙ) $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন বলতে কী বুঝ?[What do you mean by the function $f(x)$ is continuous at a point $x = a$?]

উত্তর : যদি $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0$ এবং $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ বিদ্যমান থাকে এবং $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ হয়, তবে $f(x)$ ফাংশন $x = a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হবে।

(চ) ইনফ্লেকশন বিন্দু কী? [What is inflection point?]

উত্তর : ইনফ্লেকশন বিন্দু :



চিত্রে P_1, P_2, P_3, P_4 বিন্দুতে ফাংশনটি উর্ধ্ব কনকেভ বা নিম্ন কনকেভ নয়। বিন্দুগুলোকে ইনফ্লেকশন বিন্দু বলে।

(ছ) অনির্ণেয় $\frac{0}{0}$ আকার বলতে কী বুঝ?[What do you mean by indeterminate $\frac{0}{0}$ form?]

উত্তর : যদি $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ এবং $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ হয়, তবে $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ কে অনির্ণেয় $\frac{0}{0}$ আকার বলে।

(জ) সমাকলনীয় ধ্রুবক কী? [What is the constant of integration?]

উত্তর : যদি $f(x)$ এর প্রতিডেরিভেটিভ বা ইন্টিগ্রাল $F(x)$ হয় তবে যে কোনো ধ্রুবক c এর জন্য $F(x) + c$ ও $f(x)$ এর প্রতিডেরিভেটিভ বা ইন্টিগ্রাল হবে। কাজেই সাধারণ

প্রতিডেরিভেটিভ বা ইন্টিগ্রালের জন্য $\int f(x) dx = F(x) + c$ লেখা হয়। c কে

ইন্টিগ্রেশনের ধ্রুবক বলা হয়।

(ঝ) শূন্য ফাংশনের ইন্টিগ্রাল কত? [What is the integral of zero function?]

উত্তর : ধ্রুবক ফাংশন।

(ঞ) $f(x)$ একটি যুগ্ম ফাংশন হলে $\int_{-a}^a f(x) dx$ এর মান কত?

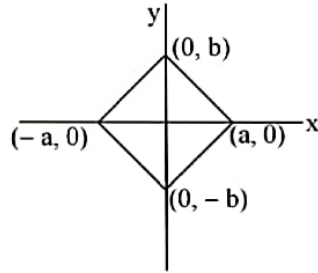
[If $f(x)$ is an even function, what is the value of $\int_{-a}^a f(x) dx$.]

উত্তর : $f(x)$ একটি যুগ্ম ফাংশন হলে $\int_{-a}^a f(x) dx = 2f(a)$.

(ট) $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ দ্বারা কী নির্দেশিত হয়? ইহার চিত্রটি অঙ্কন কর।

[What represent the $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ Sketch the graph.]

উত্তর : $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ দ্বারা হাইপোর সাইক্লয়েড নির্দেশ করে।



চিত্র :

(ঠ) $r = a \cos 4\theta$ এর কয়টি ফাঁস আছে। [How many loops are in $r = a \cos 4\theta$.]

উত্তর : $r = a \cos 4\theta$ এর আটটি ফাঁস আছে।

খ-বিভাগ

যেকোনো ৫টি প্রশ্নের উত্তর দাও-

৩ × ৫ = ১৫

২। $f(x) = \frac{x}{|x|}$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

[Find the domain and range of the function $f(x) = \frac{x}{|x|}$.]

৩। $x = \frac{2t}{1+t^3}$, $y = \frac{2t^2}{1+t^3}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

[If $x = \frac{2t}{1+t^3}$, $y = \frac{2t^2}{1+t^3}$ then find, $\frac{dy}{dx}$.]

৪। যদি $y = x^n \ln x$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $y_{n+1} = \frac{n!}{x}$.

[If $y = x^n \ln x$ then prove that, $y_{n+1} = \frac{n!}{x}$.]

৫। প্রমাণ কর যে, অন্তরীকরণযোগ্য ফাংশন সর্বদা অবিচ্ছিন্ন।

[Prove that every differentiable function is always continuous.]

৬। $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$ এর মান নির্ণয় কর। [Find the value of $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$.]

৭। $\int \tan^x x dx$ এর লঘুকরণ সূত্র নির্ণয় কর।

[Find the reduction formula for $\int \tan^x x dx$.]

৮। প্রমাণ কর যে, $\beta(m, n) = \beta(n, m)$. [Prove that, $\beta(m, n) = \beta(n, m)$.]

৯। প্রমাণ কর যে, $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. [Prove that, $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.]

গ-বিভাগ

যেকোনো ৫টি প্রশ্নের উত্তর দাও-

৭ × ৫ = ৩৫

১০। নিম্নলিখিত ফাংশনের ডোমেন, রেঞ্জ এবং লেখচিত্র অঙ্কন কর : $f(x) =$

$$\begin{cases} x^2 & \text{যখন } x \leq 0 \\ x & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{যখন } x \geq 1 \end{cases}$$

[Find the domain, range and sketch the graph of the following function :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{when } x \leq 0 \\ x & \text{when } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{when } x \geq 1 \end{cases}$$

১১। $y = x^6 - 12x^5 + 36x^4 + 4$ ফাংশনটির গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় কর।

[Find out the maximum and minimum values of the function, $y = x^6 - 12x^5 + 36x^4 + 4$.]

১২। লিবনিজের উপপাদ্য বর্ণনাসহ প্রমাণ কর। [State and prove Leibnitz's theorem.]

১৩। মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে $\ln(\sin x)$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

[Differentiate $\ln(\sin x)$ with respect to x by using definition.]

১৪। রোলের উপপাদ্য বর্ণনাসহ প্রমাণ কর। [State and prove Rolle's theorem.]

১৫। $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$ এর মান নির্ণয় কর।

[Find the value of $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$.]

১৬। $a^2y^2 = x^3(2a-x)$ রেখাটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[Find out the area bounded by curve $a^2y^2 = x^3(2a-x)$.]

১৭। $r = a(1 + \cos \theta)$ এবং $r = a(1 - \cos \theta)$ কার্ডিঅয়েডের সাধারণ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[Find the common area intersected by cardioide, $r = a(1 + \cos \theta)$ এবং $r = a(1 - \cos \theta)$.]