

সময় : ৩ ঘণ্টা

পূর্ণমান : ৬০

বিশেষ দ্রষ্টব্য : প্রতিটি বিভাগের প্রশ্নের উত্তর ধারাবাহিকভাবে লিখতে হবে।

ক-বিভাগ

১। যেকোনো ১০টি প্রশ্নের উত্তর দাও-

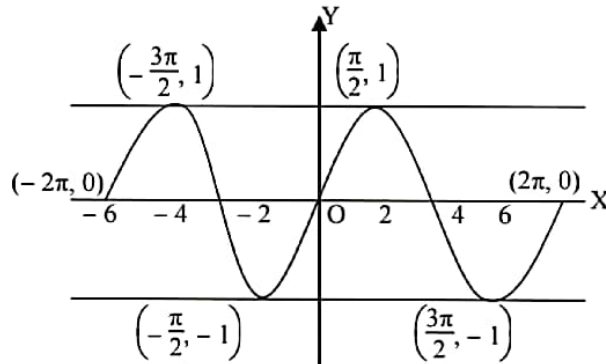
১ × ১০ = ১০

(ক) ফাংশনের ডোমেন ও কোডোমেন বলতে কী বুঝ?

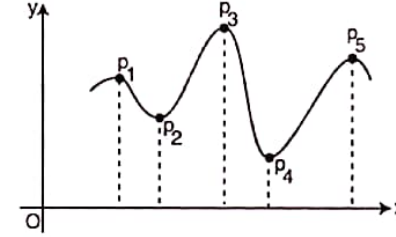
[What do you mean by domain and co-domain of a function?]

উত্তর : $f: X \rightarrow Y$ ফাংশনের X কে ডোমেন এবং Y কে কোডোমেন বলে। সাধারণত ডোমেনকে D_f এবং কোডোমেনকে cod_f দ্বারা প্রকাশ করা হয়।(খ) $y = \sin x$ ফাংশনটির স্কেচ চিত্র অঙ্কন কর। [Sketch the function $y = \sin x$.]

উত্তর :

(গ) কোন বিন্দুতে $y = x^2$ এর স্পর্শক x -অক্ষের সমান্তরাল হবে?[Where the tangent of the curve $y = x^2$ will be parallel to x -axis?]উত্তর : $\frac{dy}{dx} = 0$. সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে $y = x^2$ এর স্পর্শক X -অক্ষের সমান্তরাল।(ঘ) $f(x) = \sqrt{x}$ এর জন্য ম্যাকলরিনের অসীম ধারা বিদ্যমান নয় কেন?[Why the Maclaurin's infinite series of $f(x) = \sqrt{x}$ does not exist?]উত্তর : $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ এখানে $f'(0) = \frac{1}{0}$ বিদ্যমান নয়। সুতরাং $f(x) = \sqrt{x}$ এর জন্য ম্যাকলরিন অসীম ধারা বিদ্যমান নয়।

(ঙ) চরম বিন্দু কী? [What is critical point?]

উত্তর : চিত্রে উল্লিখিত p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 বিন্দুতে ফাংশনটি ক্রমবর্ধমান বা ক্রমহ্রাসমান নয়। বিন্দুগুলোকে সন্ধি বিন্দু বা চরম বিন্দু বলা হয়।অর্থাৎ পরপর ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান অংশদ্বয়ের মিলন বিন্দুকে সন্ধি বিন্দু বা চরম বিন্দু বলে। যদি $x = a$ সন্ধি বিন্দু বা চরম বিন্দু হয় তবে $f'(a) = 0$ হইবে।

(চ) এল হসপিটাল রুল প্রয়োগের শর্ত উল্লেখ কর। [Write down the condition for which L' Hospital rule will be applicable.]

উত্তর : এল হসপিটাল নিয়ম : যদি কোনো ব্যবধীর $x = a$ বিন্দুতে(i) $f(x)$ ও $g(x)$ ফাংশন দুইটি টেইলর ধারায় বিস্তার যোগ্য হয়।(ii) $f(x)$ ও $g(x) = 0$ হয়।(iii) $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ বিদ্যমান থাকে তবে $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$ (ছ) x এর কোন মানের জন্য $\ln(1-x)$ এর শক্তি ধারাটি বৈধ?[Find the values of x for which the power series of $\ln(1-x)$ exist.](জ) $f(x, y) = 0$ বক্ররেখার $P(x, y)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণটি লেখ।[Write down the equation of normal line at the point $P(x, y)$ of the curve $f(x, y) = 0$.]উত্তর : স্পর্শকের সমীকরণ : $y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)$ এবং অভিলম্বের সমীকরণ : $x - x_1 + (y - y_1) f'(x_1) = 0$.

(ঝ) প্রতি অন্তরজ কী? [What is anti-derivative?]

উত্তর : একটি ফাংশন $F(x)$ কে কোন প্রদত্ত ব্যবধিতে বর্ণিত ফাংশন $F(x)$ এর প্রতিডেরিভেটিভ বলা হবে যদি ঐ ব্যবধির সকল x এর জন্য $\frac{d}{dx} \{F(x)\} = f(x)$ হয়।

(ঞ) ইন্টিগ্রেশনের লঘুকরণ সূত্র কী?

[What is the reduction formula of integration?]

উত্তর : অংশক্রমে ইন্টিগ্রেশন এর সাহায্যে ধাপে ধাপে ইন্টিগ্রাল ফাংশনের ঘাত লঘু বা হ্রাস করার পদ্ধতিকে ইন্টিগ্রেশনের লঘুকরণ সূত্র বলা হয়।

(ট) গামা ফাংশনের আবর্তন সূত্রটি লেখ।

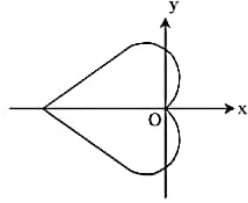
[Write down the recurrence formula of Gamma function.]

উত্তর : গামা ফাংশনের আবর্তন সূত্র হল, $\Gamma(n+1) = n \Gamma(n)$.

(ঠ) একটি কার্ডিওয়েড-এর সমীকরণ লেখ এবং চিত্র অঙ্কন কর।

[Write an equation of a cardioid and sketch it.]

উত্তর : সমীকরণ $r = a(1 + \cos\theta)$



খ-বিভাগ

যেকোনো ৫টি প্রশ্নের উত্তর দাও-

৩ × ৫ = ১৫

২। x এর সাপেক্ষে $x^y + y^x = a^b$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

[Find the differential co-efficient of $x^y + y^x = a^b$ with respect to x .]

৩। দেখাও যে, $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{যখন } x \neq 0 \\ 4, & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$ ফাংশনটি $x = 0$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন।

ফাংশনটি এমনভাবে পুনঃসংজ্ঞায়িত কর যেন $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়।

[Show that the function $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{when } x \neq 0 \\ 4, & \text{when } x = 0 \end{cases}$ is discontinuous at

the point $x = 0$. Redefine $f(x)$ in such a way so that the function $f(x)$ is continuous at $x = 0$.]

৪। গড়মান উপপাদ্যটি বর্ণনাসহ প্রমাণ কর।

[State and prove the Mean Value Theorem.]

৫। $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

[Find the domain and range of the function $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.]

৬। $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ এর ফর্ম উল্লেখসহ মান নির্ণয় কর।

[Identify the form of $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ and then find the value of it.]

৭। দেখাও যে, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\theta} d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. [Show that $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\theta} d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.]

৮। $\int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$ এর অভিসৃতি পরীক্ষা কর।

[Test the convergency of the ingegral $\int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$.]

৯। $r = 2(1 - \cos\theta)$ এর পরিসীমা নির্ণয় কর।

[Find the perimeter of the cardioid $r = 2(1 - \cos\theta)$.]

গ-বিভাগ

যেকোনো ৫টি প্রশ্নের উত্তর দাও-

৫ × ৭ = ৩৫

১০। অন্তরীকরণযোগ্যতার সংজ্ঞা দাও।

যদি $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{যখন } x \leq 0 \\ x, & \text{যখন } 0 < x < 1 \text{ হয়, তবে} \\ \frac{1}{x}, & \text{যখন } x \geq 1 \end{cases}$

দেখাও যে, $x = 1$ বিন্দুতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন কিন্তু অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

[Define differentiability of function. If $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \text{ when } x \leq 0 \\ x & , \text{ when } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x} & , \text{ when } x \geq 1 \end{cases}$

then show the function is continuous at the point $x = 1$, but not differentiable at that point.]

১১। লিবনীজের উপপাদ্যটি বর্ণনা কর। যদি $y^m + y^{-m} = 2x$ হয় তবে উপপাদ্যটি প্রয়োগ করে

দেখাও যে, $(x^2 - 1)y_{n+2} + (2n + 1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$.

[State the Leibnitz's theorem. If $y^m + y^{-m} = 2x$, then using the theorem, prove that $(x^2 - 1)y_{n+2} + (2n + 1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$.]

১২। ল্যাভ্রাজ আকারে অবশেষসহ টেলরের উপপাদ্যটি বর্ণনা কর এবং প্রমাণ কর।

[State and prove the Taylor's theorem with Lagrange's form of remainders.]

১৩। কোনো ফাংশনের গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মান বিদ্যমান থাকার শর্ত আলোচনাপূর্বক $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x$ ফাংশনটির গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় কর।

[Discuss the necessary conditions for the existence of maximum and minimum value of a function and then find the maximum and minimum value of the function $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x$.]

১৪। বিটা ও গামা ফাংশনের মধ্যে সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা কর।

[Establish the relation between Beta and Gamma functions.]

১৫। ফার্স্ট অয়লারিয়ান এবং সেকেন্ড অয়লারিয়ান কী? উহাদের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন কর।

[What is first Eulerian and second Eulerian? Establish the relation between them.]

১৬। (ক) মান নির্ণয় কর [Evaluate] : (i) $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$

$$(ii) \int \frac{dx}{3 + 2\cos x}$$

(খ) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ এর মান নির্ণয় কর। [Find the value of $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.]

১৭। $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ উপবৃত্তকে x -অক্ষের চতুর্দিকে ঘুরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তার আয়তন ও তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[Find the volume and surface area of the solid generated by revolving the ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ about the x -axis.]