

জাতীয় বিশ্ববিদ্যালয় পরীক্ষা-২০২২

বিএসসি অনার্স ১ম ♦ বিষয় : গণিত

কোর্স শিরোনাম : ক্যালকুলাস-১ ♦ কোর্স কোড : 213703

সময় : ৩ ঘণ্টা

পূর্ণমান : ৬০

[দ্রষ্টব্য : প্রতিটি বিভাগের প্রশ্নের উত্তর ধারাবাহিকভাবে লিখতে হবে।]

ক-বিভাগ

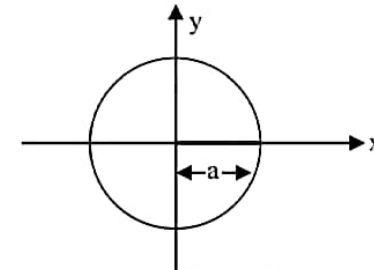
১। যেকোনো ১০টি প্রশ্নের উত্তর দাও :

১ × ১০ = ১০

(ক) $y = f(x)$ দ্বারা কী বোঝায়? [What is meant by $y = f(x)$?]উত্তর : $y = f(x)$ বোঝায় একটি স্বাধীন চলক x এর উপর অপর একটি স্বাধীন চলক y নির্ভরশী।(খ) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ কত?[What is the domain and range of the function $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$?]উত্তর : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ এর ডোমেন $Df = (-1, \infty)$ এবং রেঞ্জ $Rf = (0, \infty)$ (গ) কোন ব্যবধিতে $f(x) = \ln x$ ফাংশনটি অন্তরীকরণ যোগ্য?[Which is the interval where the functions $f(x) = \ln x$ is differentiable?]উত্তর : $(0, \infty)$ ব্যবধিতে $f(x) = \ln x$ ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য।(ঘ) জ্যামিতিকভাবে $\frac{dy}{dx}$ দ্বারা কী বোঝায়? [What is $\frac{dy}{dx}$ in geomctrically?]উত্তর : জ্যামিতিকভাবে $\frac{dy}{dx}$ দ্বারা $y = f(x)$ রেখার $(x, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে ঢাল নির্দেশ করে।(ঙ) x এর সাপেক্ষে $y = e^{-ax}$ এর n তম অন্তরজ কত?[What is the n -th derivative of $y = e^{-ax}$ with respect to x ?]উত্তর : $y = e^{-ax}$ এর n তম অন্তরজ $y_n = (-1)^n e^{-ax} \cdot a^n$ ।(চ) $y = f(x)$ বক্ররেখার উপরস্থ (x, y) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ লেখ।উত্তর : $y = f(x)$ বক্ররেখার উপরস্থ (x, y) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $X - x + \frac{dy}{dx}$ $(Y - y) = 0$ ।(ছ) $y = f(x)$ এবং $y = g(x)$ বক্ররেখা দুই লম্ব হওয়ায় শর্ত কী? [What is the condition of perpendicularity of two curves $y = f(x)$ and $y = g(x)$?]উত্তর : $y = f(x)$ এবং $y = g(x)$ বক্ররেখা দুই লম্ব হওয়ায় শর্ত $f'(x) \times g'(x) = -1$ ।(জ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{-ex}$ এর মান কত? [What is the value of $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{-ex}$?]উত্তর : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{ex} = 0$ ।

(ঝ) একটি ব্যবধিতে ক্রমবর্ধমান ফাংশন বলতে কী বুঝ?

[What do you mean by increasing function in a interval?]

উত্তর : যদি $a < x < b$ এর সকল x এর জন্য $f'(x) = 0$ হয়, তবে $y = f(x)$ ফাংশন (a, b) ব্যবধিতে ক্রমবর্ধমান হবে।(ঞ) $\int e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) dx$ এর মান কত? [What is the value of $\int e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) dx$?]উত্তর : $\int e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) dx = e^x \ln x + c$ ।(ট) কোন শর্তে $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ হবে? [What is the condition for $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$?]উত্তর : $f(x)$ অযুগ্ম ফাংশন হবে।(ঠ) $r = a$ কী নির্দেশ করে। ইহার চিত্র আঁক।[What is denoted by $r = a$? Draw its graph.]উত্তর : $r = a$ দ্বারা বৃত্ত নির্দেশ করে। নিম্নে চিত্র অঙ্কন করা হলো—

খ-বিভাগ

যেকোনো ৫টি প্রশ্নের উত্তর দাও :

৩ × ৫ = ১৫

২। যদি $f(x) = x^2 - 16$ এবং $g(x) = \sqrt{x}$ হয় তবে $(g \circ f)(x)$ নির্ণয় কর। অতঃপর $(g \circ f)(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর।

৩। লিমিটের $(\delta - \epsilon)$ সংজ্ঞা ব্যবহার করে দেখাও যে, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$ ।

৪। $\tan y = \frac{2t}{1-t^2}$ এবং $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

৫। $y = x^2 + 2x + 1$ বক্ররেখার $(1, 4)$ বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৬। $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$ এর মান নির্ণয় কর।

৭। $\int \sin^n x \, dx$ এর লঘুকরণ সূত্র প্রতিষ্ঠা কর।

৮। মান নির্ণয় কর : $\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^4 x \, dx$ ।

৯। দেখাও যে, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ।

গ-বিভাগ

যেকোনো ৫টি প্রশ্নের উত্তর দাও :

৫ × ৭ = ৩৫

১০। $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে ফাংশনটির অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা কর : $f(x) =$

$$\begin{cases} 1 & \text{যখন } x < 0 \\ 1 + \sin x & \text{যখন } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 2 + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 & \text{যখন } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

১১। রোলের উপপাদ্য বর্ণনাসহ প্রমাণ কর।

১২। যদি $y = A(x + \sqrt{x^2 + 1})^m + B(x + \sqrt{x^2 + 1})^{-m}$ হয় তবে দেখাও যে, $(1 + x^2)y_{n+2} + (2n + 1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$ ।

১৩। $(0, 9)$ ব্যবধিতে $f(x) = x^3 - 18x^2 + 96x$ ফাংশনটির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর।

১৪। মান নির্ণয় কর : [Evaluate :] (i) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} \, dx$ (ii) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sqrt{\cot x}}$ ।

১৫। দেখাও যে, [Show that] $\int_0^{\pi/2} \sin^p \theta \cos^q \theta \, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)}$

১৬। ইন্টিগ্রাল ক্যালকুলাসের মৌলিক উপপাদ্য বর্ণনা ও প্রমাণ কর।

১৭। $x^3 + y^3 = 3axy$ রেখার একটি ফাঁসের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।