বিএসসি (অনার্স) প্রথম বর্ষ পরীক্ষা–২০১১

লিনিয়ার এলজাবরা ▸ বিষয় কোড : ২১৩৭০৫

ক-বিভাগ

১। যেকোনো ১০ টি প্রশ্নের উত্তর দাও– **১ × ১০ = ১০**

(ক) ম্যাট্রিক্স কী?

উত্তর : কতগুলো উপাদানকে সারি এবং কলাম আকারে সাজিয়ে প্রথম বন্ধনী বা তৃতীয় বন্ধনী বা উলম্ব জোড়া বারের ভিতরে আবদ্ধ করাকে ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

(খ) প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের একটি উদাহরণ দাও।

উত্তর : A একটি বর্গাকার ম্যাট্রিক্স হলে উহা প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হবে $a_{ij} = a_{ji}$ হয়।

উদাহরণ : $A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$

(গ) হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : যদি A একটি $n \times n$ ক্রমের বর্গাকার ম্যাট্রিক্স হয় তবে A কে হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স বলা হইবে যদি $(\bar{A})^T = A$ হয়।

(ঘ) নির্ণায়কে অণুরাশি কাকে বলে।

উত্তর : n ক্রমের নির্ণয়কের যে কোনো পদের অণুরাশি একটি $n - 1$ ক্রমের নির্ণয়কের মান যাহা ঐ পদগামী সারি ও কলাম বাদে পাওয়া যায়।

(ঙ) ∇^n এ ভেক্টর বলতে কী বুঝ?

উত্তর : বাস্তব সংখ্যার সকল ক্রমায়িত n পলের সেটকে n-মাত্রিক বাস্তব জগত বা ইউক্লিড়ীয় n জগত বলা হয়। ইহাকে ∇^n দ্বারা সূচিত করা হয়। অর্থাৎ $\nabla^n = \{(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n)\}$।

(চ) $\mathfrak{R}^n$-এ ভেক্টর নর্ম বা দৈর্ঘ্যের সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : $\mathfrak{R}^n$-এ $\mathbf{u} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ভেক্টরের নর্ম বা দৈর্ঘ্য $\|\mathbf{u}\|$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + \ldots\ldots\ldots + z_n\bar{z}_n}$$
$$= \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots\ldots\ldots + |z_n|^2}$$

(ছ) যদি $\mathbf{u} = (1, i, 2 + i)$ এবং $\mathbf{v} = (1 + 2i, 3 - 2i, 0)$ হয় তবে, u. v. নির্ণয় কর।

উত্তর : $\mathbf{u}.\ \mathbf{v} = 1\ (1 - 2i) + i\ (3 + 2i)$
$= 1 - 2i + 3i - 2 = i - 1$

(জ) অসংগত রৈখিক সমীকরণ জোট বলতে কী বোঝায়?

উত্তর : একটি যোগাশ্রয়ী সমীকরণ জোটকে অসঙ্গত বলা হবে যদি জোটের কোনো সমাধান বিদ্যমান না থাকে।

(ঝ) কখন রৈখিক সমীকরণ জোটের একাধিক সমাধান থাকে?

উত্তর : যদি কোনো যোগাশ্রয়ী সমীকরণ জোটের ইচালন আকারে অশূন্য সারি সংখ্যার চেয়ে চলক সংখ্যার চেয়ে বেশি হয় তবে উক্ত সমীকরণ জোটের একাধিক সমাধান বিদ্যমান।

(ঞ) ভেক্টরের যোগাশ্রয়ী সমাবেশ বলতে কী বুঝ?

উত্তর : মনে করি, F ফিল্ডে V একটি ভেক্টর জগত যেখানে $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots\ldots \mathbf{v}_n \in V$ এবং $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n \in F$। যদি $a_1v_2 + \ldots\ldots + a_nv_n = \mathbf{v} \in F$ হয় তবে $\mathbf{v}$ কে $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots\ldots \mathbf{v}_n$ ভেক্টরগুলোর যোগাশ্রয়ী সমাবেশ বলা হয়।

(ট) ∇^3 এর উপজগতের একটি উদাহরণ দাও।

উত্তর : $S = \{(x, y, z) : x + y - z = 0\}$, ∇^3-এর একটি উপজগত।

(ঠ) ∇^3-এর তিনটি ভেক্টর লিখ যারা যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল।

উত্তর : (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) ভেক্টর এর যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল।

(ড) z অক্ষের মাত্রা কত?

উত্তর : z অক্ষের মাত্রা = 1

(ঢ) যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের নালিটি কাকে বলে।

উত্তর : $T : V\ (F) \to U\ (F)$ যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের কার্নেল $KerT = \{\mathbf{v} \in V\ (F) : T\ (\mathbf{v}) = \mathbf{O} \in U\ (F)$ এর মাত্রাকে নালিটি বলে।

(ন) মিনকাওয়াস্কির অসমতাটি লিখ।

উত্তর : $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ ইহাই মিনকাওয়াকির অসমতা।

(ত) $T : \nabla^4 \to \nabla^3$ যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের র‍্যাংক = 2 হলে নালিটি কত?

উত্তর : র‍্যাংক + নালিটি = 4

⇒ 2 + নালিটি = 4

⇒ নালিটি = 4 – 2

∴ নালিটি = 2

(থ) স্বভাবী বহুপদী কাকে বলে?

উত্তর : A একটি n ক্রমের বর্গাকার ম্যাট্রিক্স এবং $\lambda \in F$ হইলে $|\lambda I_n - A|$ কে A এর স্বভাবী বহুপদী বলে।

(দ) যোগাশ্রয়ী নির্ভরশীল ভেক্টরের সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : মনে করি, F ফিল্ডে V একটি ভেক্টর জগত যেখানে $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots\ldots, \mathbf{v}_n \in V$ এবং $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n \in F$। যদি $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots\ldots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{O}$ এবং $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ স্কেলারসমূহ কমপক্ষে একটি অশূন্য হয় তবে $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots\ldots \mathbf{v}_n$ ভেক্টরগুলোকে যোগাশ্রয়ী নির্ভরশীল বলা হয়।

(ধ) কখন একটি বর্গম্যাট্রিক্সকে বিপরীত যোগ্য বলা হয়।

উত্তর : ব্যতিক্রম ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স থাকে না কারণ আমরা জানি, A ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj } A$ ..... (1)

এখন A ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে $|A| = 0$ হবে। যা দ্বারা (i) বিদ্যমান হবে না।

(ন) ভেক্টরজগতের মাত্রা বলতে কী বুঝায়।

উত্তর : সসীম মাত্রার ভেক্টর জগতের মাত্রা হলো ভেক্টর জগতের যে কোনো ভিত্তির ভেক্টরের সংখ্যা।

(প) যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : V (F) ও U (F) ভেক্টর জগত দুইটির ক্ষেত্রে $T : V(F) \rightarrow U(F)$ রূপান্তরটিকে যোগাশ্রয়ী রূপান্তর বলা হইবে যদি $\forall\ \mathbf{u}, v \in V$।

$\Rightarrow T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ এবং $T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$ হয়।

(ফ) দুইটি ম্যাট্রিক্সে কখন গুণযোগ্য হয়?

উত্তর : যদি দুইটি ম্যাট্রিক্সের প্রথম ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যা সমান হয় তবে তারা গুণযোগ্য হবে।

(ব) সারি র‍্যাংক কাকে বলে।

উত্তর : কোনো ম্যাট্রিক্সকে ইচালন আকারে প্রকাশ করলে উহার অশূন্য সারি সংখ্যাকে ম্যাট্রিক্সটির সারি র‍্যাংক বলে।

(ভ) ∇^3 এর আদর্শ ভিত্তি লিখ।

উত্তর : ∇^3 এর আদর্শ ভিত্তি হলো : $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$।

খ-বিভাগ

যে কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও— ৪ × ৫ = ২০

২। (ক) যদি $u, v \in \nabla^n$ হয় তবে দেখাও যে, $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = (\|u\|^2 + \|v\|^2)$

(খ) মনে করি, $u = (3 - 7i, 2i, -1 + i)$ এবং $v = (4 - i, 11 + 2i, 8 - 3i)$; তখন $u.v$ ও $\|u - v\|$ এর মান নির্ণয় কর।

।

৩। (ক) λ ও μ এর উপর এরূপ শর্ত নির্ণয় কর। যে নিম্নলিখিত সরল সমীকরণ মালার (i) একটি অনন্য সমাধান থাকে, (ii) একাধিক সমাধান থাকে। $2x + 3y + z = 5$, $3x - y + \lambda z = 2$, $x + 7y - 6z = \mu$

(খ) সমীকরণ জোটের সমাধান কর।

$$2x - 3y + 4z = 2$$
$$3x + 4y - 5z = 15$$
$$9x + 5y + 7z = 20$$

৪। (ক) A ও B অব্যতিক্রম বর্গাকার ম্যাট্রিক্স হলে প্রমাণ কর যে, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(খ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ হলে প্রমাণ কর যে, $(AB)^T = B^TA^T$.

৫। (ক) যদি ভেক্টর জগৎ V (F) এর দুটি উপজগৎ S এবং T হয় তবে দেখাও যে $S \cap T$ এবং V (F) এর উপজগৎ হবে।

(খ) $\delta = \{(a, b, c) : a^2 + b^2 + c^2 \leq 1, a, b, c \in \nabla\}$ সেটটি ∇^3 ভেক্টর জগতের উপজগত কিনা পরীক্ষা কর।

৬। (ক) দেখাও যে, (1, 1, − 1), (1, 0, 2), (1, 1, 1) ভেক্টরগুলো যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল।

(খ) যদি সম্ভব হয় $M = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$কে $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$এবং $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$এর যোগাশ্রয়ী সমাবেশ রূপে প্রকাশ কর।

৭। (ক) দেখাও যে, $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ভেক্টরের সেটটি ∇^3 এর ভিত্তি।

(খ) দেখাও যে, ভেক্টর জগত ∇^3 এর $\{(1, 2, 3), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ এর সৃজক।

৮। (ক) মনে করি, $T : V(F) \rightarrow U(F)$ একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর। তাহলে $\text{Im}\,(T)$, $U(F)$ এর একটি উপজগত হবে।

(খ) $T : \nabla^3 \rightarrow \nabla^3$ চিত্রটি $T(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। দেখাও যে, T একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর।

৯। (ক) ক্যালি হ্যামিল্টন এর উপপাদ্য বর্ণনাসহ প্রমাণ কর।

(খ) আদর্শ ভিত্তির সাপেক্ষে $T : \nabla^3 \rightarrow \nabla^4$ যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের ম্যাট্রিক্স রূপায়ন কর যা $T(x, y, z) = (x + y, x - y, z, x)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

গ–বিভাগ

যে কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও– **১০ × ৫ = ৫০**

১০। প্রমাণ কর :
$$\begin{vmatrix} 1 + a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 + a_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 + a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\dots a_n\left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)$$

১১। দেখাও যে, বাস্তব পদবিশিষ্ট 2×2 ম্যাট্রিক্সের সেট v ম্যাট্রিক্সের যোগ ও স্কেলার গুণের সাপেক্ষে একটি ভেক্টর জগত হবে।

১২। $U = \{(a, b, c, d) \in \nabla^4 : a = b\}$, $V = \{(a, b, c, d) \in \nabla^4 : a + b = c, d = 2b$ হলে, U, V, $U + V$ প্রত্যেকটি উপজগতের একটি করে ভিত্তি নির্ণয় কর।

১৩। মনে করি $V(F)$ একটি সসীম মাত্রার ভেক্টর এবং $T : V(F) \rightarrow U(F)$ একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর। তাহলে দেখাও যে, $\dim(\text{Im}T) + \dim(\ker T) = \dim(V(F))$.

১৪। $T : \nabla^5 \rightarrow \nabla^4$ যোগাশ্রয়ী রূপান্তর নিম্নের ম্যাট্রিক্স দ্বারা বর্ণিত হলে kerT এর ভিত্তি নির্ণয় কর। [T: $\nabla^5 \rightarrow \nabla^4$

১৫। যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের ম্যাট্রিক্স বলতে কী বুঝ?

১৬। ম্যাট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$এর সকল আইগেন মান ও সংশ্লিষ্ট আইগেন ভেক্টরসমূহ নির্ণয় করি।