বিএসসি (অনার্স) প্রথম বর্ষ পরীক্ষা–২০১২

লিনিয়ার এলজাবরা ▶ বিষয় কোড : ২১৩৭০৫

ক-বিভাগ

১। যেকোনো ১০ টি প্রশ্নের উত্তর দাও– **১ × ১০ = ১০**

(ক) ∇^3-এ ডট গুণন কী?

উত্তর : ∇^3-এ $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ এবং $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ভেক্টরদ্বয়ের ডট বা অন্তগুণন $\mathbf{u.v}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$

(খ) রৈখিক সমীকরণের শূন্য সমাধান কী?

উত্তর : n সংখ্যক চলক $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$-এর কোনো সমমাত্রিক যোগাশ্রয়ী সমীকরণ জোটের অবশ্যই শূন্য n পল $O = (0, 0, 0, \ldots\ldots, 0)$ সমাধান বিদ্যমান। এই সমাধানকে প্রদত্ত সমীকরণ জোটের শূন্য সমাধান বলে।

(গ) বঙ্কিম প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের একটি উদাহরণ দাও।

উত্তর : মনে করি, $A = [a_{ij}]$ একটি বর্গাকার ম্যাট্রিক্স। A-কে বঙ্কিম প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $a_{ij} = -a_{ji}$।

উদাহরণ : $A^T = \begin{bmatrix} o & -h & -g \\ h & o & -f \\ g & f & o \end{bmatrix} = -A$

(ঘ) নির্ণায়কের সহ-গুণক কাকে বলে?

উত্তর : $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

নির্ণায়কের a_{rs} পদের চিহ্নযুক্ত অণুরাশি A_{rs} কে ঐ পদের সহগুণক বলা হয়।

(ঙ) ভেক্টর $\mathbf{u} = (2, -3, 1, 5)$ এর একক ভেক্টর নির্ণয় কর?

উত্তর : $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (1)^2 + (5)^2}$

$= \sqrt{4 + 9 + 1 + 25} = \sqrt{39}$

$\therefore |\mathbf{u}|$ = এর একক ভেক্টর $\mathbf{e} = \dfrac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$

$= \dfrac{2}{\sqrt{39}}, \dfrac{-3}{\sqrt{39}}, \dfrac{1}{\sqrt{39}}, \dfrac{5}{\sqrt{39}}$

(চ) একটি nilpotent ম্যাট্রিক্স এর উদাহরণ দাও।

উত্তর : ধরি, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\therefore A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [0]$

(ছ) বিপরীত ম্যাট্রিক্স এর সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : যদি A ও B দুইটি n ক্রমের বর্গম্যাট্রিক্স হয়। সে ক্ষেত্রে $AB = BA = I_n$ তবে B কে A অথবা A কে B এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স বলে।

(জ) ভেক্টর জগত এর সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : মনে করি F একটি ফিল্ড এবং F ফিল্ডে V একটি অশূন্যক ভেক্টরের সেট। যদি V ভেক্টর যোগ প্রক্রিয়া মেনে চলে তবে তাকে ভেক্টর জগত বলে।

(ঝ) ∇^4 এর আদর্শ ভিত্তি লেখ।

উত্তর : {(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)}

(ঞ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, R (T) এর ভিত্তি ও মাত্রা কত?

উত্তর : R (T)-এর ভিত্তি $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right\}$ এবং মাত্রা = 2।

(ট) {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)} সেটটির কোনো ভিত্তি আছে কী?

উত্তর : যেহেতু, প্রদত্ত ভেক্টরগুলো যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল, কাজেই ইহার কোনো ভিত্তি নয়।

(ঠ) ম্যাট্রিক্সের র‍্যাংক কী?

উত্তর : যে কোনো ম্যাট্রিক্স কে সারি বা কলাম ইচালন আকারে প্রকাশ করলে তার অশূন্য সারি বা কলাম সংখ্যাকে ম্যাট্রিক্সের সারি বা কলাম র‍্যাংক বলে। এই সারি বা কলাম র‍্যাংককে ম্যাট্রিক্সের র‍্যাংক বলা হয়।

(ড) একটি ম্যাট্রিক্স এর আইগেন মানসমূহ কী?

উত্তর : মনে করি, F ফিল্ডে A একটি n ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স। যদি $\lambda \in F$ এবং একটি অশূন্য ভেক্টর $\mathbf{v} \in F^n$ বিদ্যমান থাকে যে জন্য $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ হয় তবে স্কেলার λ-কে A-এর আইগেন মান বলে।

(ঢ) যোগাশ্রয়ী চিত্রন এর প্রতিচ্ছবি কাকে বলে।

উত্তর : $T : v(F) \to u(F)$ যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের ইমেজ বা প্রতিচ্ছবি ImT দ্বারা সূচিত করা হয় যেখানে $ImT = \{\mathbf{u} \in u(F) : T(\mathbf{v}) = \mathbf{u}, v \in v(F)\}$.

(ন) ক্যালি-হ্যামিল্টন তত্ত্বটি লিখ।

উত্তর : প্রত্যেক বর্গ ম্যাট্রিক্স উহার স্বভাবী সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

(ত) একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর কখন আইসোমরফিক বলা হয়।

উত্তর : একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর one-one এবং onto হইলে উহাকে আইসোমরফিক বলা হয়।

(থ) ব্যতিক্রমী যোগাশ্রয়ী রূপান্তর কাকে বলে।

উত্তর : মনে করি, $T : U \to V$ একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর। যদি U এর কোনো অশূন্য উপাদানের ছবি শূন্য হয় তবে তাকে ব্যতিক্রম যোগাশ্রয়ী রূপান্তর বলা হয়।

(দ) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ **ম্যাট্রিক্সের ট্রেস কত?**

উত্তর : দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\therefore$ ট্রেস $= 3 + 1 + 4 = 8$

(ধ) কখন একটি ম্যাট্রিক্স বিপরীত যোগ্য?

উত্তর : ব্যতিক্রম ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স থাকে না কারণ আমরা জানি, A ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj } A$ ..... (1)

এখন A ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে $|A| = 0$ হবে। যা দ্বারা (i) বিদ্যমান হবে না।

(ন) দুইটি ভেক্টর প্রত্যক্ষ যোগের সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : v (F) ভেক্টর জগতের দুইটি উপজগত U ও W এর প্রত্যক্ষ যোগ $V = U \oplus W$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়, তা এরূপভাবে বিদ্যমান হইবে যে, প্রত্যেক ভেক্টর $\mathbf{v} \in V$ কে একক এবং কেবলমাত্র একক $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}, u \in U, \mathbf{w} \in W$ আকারে প্রকাশ করা যায়।

(প) ম্যাট্রিক্সের স্তম্ভমাত্রা বলতে কী বুঝ?

উত্তর : কোনো ম্যাট্রিক্সকে কলাম ইচালন আকারে প্রকাশ করলে উহার অশূন্য কলাম সংখ্যাকে ম্যাট্রিকটির স্তম্ভমাত্রা বলে।

(ফ) যোগাশ্রয়ী অপারেটর বলতে কী বুঝ?

উত্তর : v (F) ভেক্টর জগতের ক্ষেত্রে $T : v(F) \to v(F)$ রূপান্তরটিকে যোগাশ্রয়ী অপারেটর বলা হবে যদি $\forall\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \Rightarrow T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ এবং $F(\alpha \mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$ হয়।

(ব) ভেক্টর উপ-জগতের সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : মনে করি v(F) ভেক্টর জগতের একটি অশূন্যক উপসেট w. যদি v(F) ও w(F) একই ভেক্টর যোগ ও স্কেলার গুণন প্রক্রিয়ায় ভেক্টর জগত হয় তাহলে w কে v(F) এর উপজগত বলা হয়।

(ভ) (2 × 2) মাত্রায় হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স এর উদাহরণ দাও।

উত্তর : একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A কে হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $(\bar{A})^T = A$ হয়।

উদাহরণ : $A = \begin{bmatrix} 5 & 3+i \\ 3-i & 8 \end{bmatrix}$

খ-বিভাগ

যে কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও– **৪ × ৫ = ২০**

২। (ক) যদি $u, v, \in \nabla^n$; $u = (5, -2)$ এবং $v = (3, 4)$ হলে প্রমাণ কর যে, $\| u + v \| \leq \| u \| + \| v \|$

(খ) কসি স্কোয়াটস এর অসমতাটি প্রমাণ কর।

৩। (ক) প্রমাণ কর যে, p, q, r এর যে কোনো মানের জন্যই নিম্নলিখিত সমীকরণ জোটের একক সমাধান বিদ্যমান এবং সমাধান কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, প্রতিটি বিজোড় মাত্রা বঙ্কিম প্রতিসম নির্ণায়কের মান শূন্য।

৪। (ক) প্রমাণ কর যে, একটি ম্যাট্রিক্স এর সারি মাত্রা এবং স্তম্ভমাত্রা সমান হবে।

(খ) ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞা দাও। নিম্নের ম্যাট্রিক্সের মাত্রা নির্ণয় কর।

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

৫। (ক) যদি v (F) একটি ভেক্টর জগত হয়, তবে দেখাও যে, $\forall K \in F$ এবং $O \in V \Rightarrow ko = 0$

(খ) $v = (1, -2, 5)$ ভেক্টরটিকে $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 (1, 2, 3)$ এবং $e_3 = (2, -1, 1)$ এর যোগাশ্রয়ী সমাবেশ আকারে প্রকাশ কর।

৬। (ক) প্রমাণ কর যে, ভেক্টর জগত v (F) এর উপসেট w হবে যদি এবং কেবল যদি (i) $w = \phi$, (ii) $\forall u, v \in w \Rightarrow u + v \in w$

(খ) যদি $w = L (S)$ যেখানে S $\{(1, -2, 5, 3), (2, 3, 1, -4), (3, -8, -3, 5)$ হলো ∇^4 এর যে কোনো উপসেট তবে w এর ভিত্তি ও মাত্রা নির্ণয় কর।

৭। (ক) ধরি, $T : \nabla^3 \to \nabla^3$ একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর, যেখানে $T (x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$ হয়, তবে 1mT এবং KerT নির্ণয় কর।

(খ) ক-তে বর্ণিত রূপান্তর T এর জন্য ∇^3 এর $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)$ ভিত্তির সাপেক্ষে ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর।

৮। (ক) $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, -1, 1)\}$ সেটটি ভেক্টর জগত ∇^3 এর ক্ষেত্রে ভিত্তি গঠন করে কিনা নির্ণয় কর।

(খ) যদি $S < \nabla^3$; $S = \{(1, 0, 0), (2, 1, 1), (5, 1, 1)\}$ হয় তবে L (S) এর মাত্রা নির্ণয় কর।

৯। (ক) প্রমাণ কর যে, একই যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের বিভিন্ন আইগেন মান সংশ্লিষ্ট আইগেন ভেক্টরগুলো যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল।

(খ) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের আইগেন মান কত?

গ–বিভাগ

যে কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও– **১০ × ৫ = ৫০**

১০। লাপ্লাসের পদ্ধতি ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix} a^2 + \lambda & ab & ac & ad \\ ab & b^2 + \lambda & bc & bd \\ ac & be & c^2 + \lambda & cd \\ ad & bd & cd & d^2 + \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \lambda)$$

১১। ভেক্টর জগত ভিত্তি ও মাত্রার সংজ্ঞা দাও যদি U এবং W দুইটি কোনো ভেক্টর জগতের সসীম মাত্রাবিশিষ্ট উপজগত হয়, তা হলে প্রমাণ কর যে, $\dim (U + W) = \dim U + \dim W - \dim (U \cap W)$

১২। ম্যাট্রিক্স এ সাহায্যে সমীকরণগুচ্ছ সমাধান কর।

$3x - y + 5z = 1$
$2y + 4z = 2$
$6x - y + 3z = 0$

১৩। $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ এবং $\{(1, 3), (1, 4)\}$ ভিত্তিতে প্রেক্ষিতে $T (x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$ দ্বারা বর্ণিত যোগাশ্রয়ী রূপান্তর $T : R^3 (R) \to R^2 (R)$ এর ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

১৪। ধরি, $T : \nabla^3$ এর উপর একটি যোগাশ্রয়ী সংঘটক যার সংজ্ঞা $T (x, y, z) = (2x - 3y + 4z, 5x - y - 2z, 4x + 7y)$ দ্বারা বর্ণিত যোগাশ্রয়ী রূপান্তর $T : R^3 (R) \to R^2 (R)$ এর ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

১৫। $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির জন্য ক্যালি-হ্যামিল্টনের উপপাদ্য সত্যতা যাচাই কর।

১৬। $T : \nabla^3 \to \nabla^3$ যোগাশ্রয়ী অপারেটর $T (x, y, z) = (x + y - z, x + y + z)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত T বিপরীত যোগ্য কি-না পরীক্ষা কর। যদি অপারেটরটি বিপরীতযোগ্য হয় তবে T^{-1} নির্ণয় কর এর ফলাফল যাচাই কর।