বিএসসি (অনার্স) প্রথম বর্ষ পরীক্ষা–২০১৩

লিনিয়ার এলজাবরা ▶ বিষয় কোড : ২১৩৭০৫

ক-বিভাগ

১। যেকোনো ১০ টি প্রশ্নের উত্তর দাও– **১ × ১০ = ১০**

(ক) যদি $u \in \nabla$ হয় তবে $\|u\|$ ও $<u, u>$ এর মধ্যে সম্পর্ক কী?

উত্তর : নির্ণেয় সম্পর্কটি হলো : $\|u\| = \sqrt{<u, u>}$

(খ) A ও B দুইটি ম্যাটিক্স হলে A ও B বিদ্যমান থাকার শর্ত কী?

উত্তর : কতগুলো উপাদানকে সারি এবং কলাম আকারে সাজিয়ে প্রথম বন্ধনী বা তৃতীয় বন্ধনী বা উলম্ব জোড়া বারের ভিতরে আবদ্ধ করাকে ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

(গ) A ও A^T এর মধ্যে কোনো সম্পর্ক বিদ্যমান থাকলে A কে স্কিউ প্রতিসম ম্যাটিক্স বলা হয়।

উত্তর : $A^T = -A$ হলে, A কে স্কিউ প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

(ঘ) নির্ণায়কের উপাদানের অনুরাশি ও সহগুণকের মধ্যে সম্পর্ক কী?

উত্তর : নির্ণয়কের p তম সারি 3q তম কলামের ছেদ উপাদানের অণুরাশি এবং সহগুণকের মধ্যে সম্পর্ক হইল : (সহগুণক) $= (-1)^{p+q} \times$ (অণুরাশি)।

(ঙ) ভেক্টর জগত v এর মাত্রা 3 এবং $S = \{v_1, v_2, v_3\}$, v এর একটি অনির্ভরশীল উপসেট হলে s কী v এর ভিত্তি হবে।

উত্তর : প্রদত্ত শর্ত $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ একটি সৃজক। কাজেই S একটি v এর ভিত্তি হইবে।

(চ) যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের র‍্যাংক কত?

উত্তর : $T : V(F) \rightarrow U(F)$ যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের ইমেজ $\text{Im}T = \{\mathbf{u} \in U(F) : T(v) = \mathbf{u}\ v \in v(F)$ এর মাত্রা কে T এর র‍্যাংক বলে।

(ছ) A ম্যাট্রিক্সর A^{-1} থাকার শর্তগুলো কী কী?

উত্তর : শর্তগুলো হলো :

(i) A বর্গাকার ম্যাট্রিক্স হবে।

(ii) A অত্যাতিক্রমী মাট্রিক্স অর্থাৎ $|A| \neq 0$ হবে।

(জ) কখন রৈখিক সমীকরণ জোটের একাধিক সমাধান থাকে।

উত্তর : যদি কোনো যোগাশ্রয়ী সমীকরণ জোটের ইচালন আকারে অশূন্য সারি সংখ্যার চেয়ে চলক সংখ্যার চেয়ে বেশি হয় তবে উক্ত সমীকরণ জোটের একাধিক সমাধান বিদ্যমান।

(ঝ) স্কিউ হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্সের একটি উদাহরণ দাও।

উত্তর : যদি $(\bar{A})^T = -A$ হয় তবে তা স্কিউ হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স হবে।

যেমন : $A = \begin{bmatrix} o & i \\ i & o \end{bmatrix}$

$$(\bar{A})^T = \begin{bmatrix} o & -i \\ -i & o \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} o & -i \\ -i & o \end{bmatrix} = -A.$$

(ঞ) দুইটি ভেক্টর উপজগতের যোগ এর সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : যদি u এবং w দুটি উপজগত হয় তবে উহার u + w দ্বারা প্রকাশিত এবং তা নিম্নরূপ–

$U + W = \{\mathbf{u} + \mathbf{w} : \mathbf{u} \in U, w \in w\}$

(ট) স্বভাবী ম্যাট্রিক্স বলতে কী বুঝ?

উত্তর : A একটি n ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং $\lambda \in F$ হলে $\lambda I_n - A$ কে A এর স্বভাবী ম্যাট্রিক্স বলে।

(ঠ) ∇^3 এর আদর্শ ভিত্তি এর মাত্রা লেখ।

উত্তর : ∇^3 এর আদর্শ ভিত্তি হলো : $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, এবং মাত্রা = 3

খ-বিভাগ

যে কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও– **৪ × ৫ = ২০**

২। যদি $u = (3 - 2i, 5i, 1 + 3i)$, $v = (5 + 2i, 2 - 3i, 7 + 4i)$ হয় তবে, $u \cdot v$, $v \cdot u$, $\|u - v\|$ এবং $\|v - u\|$ এর মান নির্ণয় কর।

৩। দেখাও যে, প্রত্যেক জোড় ক্রমের বঙ্কিম প্রতিসম নির্ণায়কের মান একটি পূর্ণ বর্গাকার।

৪। $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 8 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির র‍্যাংক নির্ণয় কর।

৫। মনে করি, $T : \nabla^3 \rightarrow \nabla^3$ একটি যোগাশ্রয়ী সংঘটক যা নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত :

$T(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z)$

(i) দেখাও যে, T বিপরীতযোগ্য

(ii) T^{-1} এর জন্য একটি ফর্মূলা তৈরি কর।

৬। মনে কর, $T : \nabla^3 \to : \nabla^3$ একটি যোগাশ্রয়ী সংঘটক যা নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত $(2x + y, x - y, z)$ ∇^3 এর আদর্শ ভিত্তির সাপেক্ষে T এর ম্যাট্রিক্স রূপায়ন কর।

৭. নিম্নোলিখিত সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় কর।

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ -x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

৮. $E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ কে $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ এর যোগাশ্রয়ী সমাবেশ রূপে প্রকাশ কর।

৯. $T ঃ \nabla^3 \to \nabla^2$ এবং যদি $T(x, y, z) = (2x + y + z, 3x + 2y + 4z)$ দ্বারা বর্ণিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, T একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর।

গ–বিভাগ

যে কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও– **১০ × ৫ = ৫০**

১০. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

১১. $\left.\begin{aligned} \lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= 1 \\ x + y + \lambda z &= 1 \end{aligned}\right\}$ সমীকরণ জোটের জন্য λ এর মান নির্ণয় কর, যাতে সমীকরণ জোটের–

(i) অনন্য সমাধান বিদ্যমান থাকে।

(ii) কোনো সমাধান বিদ্যমান না থাকে।

(iii) একাধিক সমাধান বিদ্যমান থাকে।

১২. যদি ∇^5 এর দুইটি উপজগত U এবং W যথাক্রমে $\{(1,3,-3,-1,-4), (1,4,-1,-2,-2), (2,9,0,-5,-2)\}$ এবং $\{(1,6,2,-2,3), (2,8,-1,-6,-5), (1,3,-1,-5,-6)\}$ দ্বারা সৃজিত। তাহলে (I) $\dim (U + W)$ এবং (ii) $\dim (U \cap W)$ এর মান নির্ণয় কর।

১৩. ∇ ফিল্ডে $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের আইগেন মান সংশ্লিষ্ট আইগেন ভেক্টর নির্ণয় কর। আরো বিপরীতযোগ্য একটি ম্যাটিক্স P নির্ণয় কর যাতে $P^{-1}AP$ কর্ণ ম্যাট্রিক্স হয়।

১৪. মনে করি ∇^4 এর দুইটি উপজগত v ও w নিম্নরূপ :

$v = \{(a, b, c, d) : b - 2c + d = 0\}$

$w = \{(a, b, c, d) : a = d, b = 2c\}$

v, w, $v \cap w$ এবং $v + w$ এর ভিত্তি ও মাত্রা নির্ণয় কর।

১৫। যোগাশ্রয়ী রূপান্তর $T : V \to w$ এর র‍্যাংক এর সংজ্ঞা দাও। প্রমাণ কর যে র‍্যাংক (T) + শূন্যত্ব (T) = n। যেখানে n হচ্ছে ভেক্টর জগত v এর মাত্রা।

১৬। যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের সংজ্ঞা দাও। দেখাও যে, $T : \nabla^3 \to \nabla^2$ যেখানে $T(x, y, z) = (x + y - z, 2x - y + 2z)$ একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর। ImT এবং kerT এর ভিত্তি এবং মাত্রা নির্ণয় কর।

১৭। মনে করি, $T : \nabla^3 \to R^3$, একটি যোগাশ্রয়ী সংঘটক যা $T(x,y,z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। ($f_1 = (1, 1, 1)$, $f_2 = (1,1,0)$, $f_3 = (0, 0, 1)$ ভিত্তির সাপেক্ষে T এর ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করে এবং যে কোনো ভেক্টর $v \in \nabla^3$ এর জন্য যাচাই কর যে, $[T]_f [v]_f = [T(v)]_f$.