বিএসসি (অনার্স) প্রথম বর্ষ পরীক্ষা–২০১৪

লিনিয়ার এলজাবরা ▶ বিষয় কোড : ২১৩৭০৫

ক-বিভাগ

১। যেকোনো ১০ টি প্রশ্নের উত্তর দাও— **১ × ১০ = ১০**

(ক) স্কিউ হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : যদি A একটি $n \times n$ ক্রমের বর্গাকার ম্যাট্রিক্স হয় তবে A কে হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $(\bar{A})^T = A$ হয়।

(খ) ম্যাটিক্সের র‍্যাংক কী?

উত্তর : যে কোনো ম্যাট্রিক্স কে সারি বা কলাম ইচালন আকারে প্রকাশ করলে তার অশূন্য সারি বা কলাম সংখ্যাকে ম্যাট্রিক্সের সারি বা কলাম র‍্যাংক বলে। এই সারি বা কলাম র‍্যাংককে ম্যাট্রিক্সের র‍্যাংক বলা হয়।

(গ) ∇^n এ ভেক্টর বলতে কী বুঝ?

উত্তর : বাস্তব সংখ্যার সকল ক্রমায়িত n পলের সেটকে n-মাত্রিক বাস্তব জগত বা ইউক্লিড়ীয় n জগত বলা হয়। ইহাকে ∇^n দ্বারা সূচিত করা হয়। অর্থাৎ $\nabla^n = \{(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n)\}$ ।

(ঘ) $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ **সমীকরণ জোটটির সাধারণ যোগ্যতার শর্তসমূহ উল্লেখ কর।**

উত্তর : (i) যদি $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ হয় তবে সমীকরণ জোটির কোনো সমাধান থাকবে না এবং উল্লেখিত শর্ত বিদ্যমান না হলে সাধারণ যোগ্য হবে; (ii) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ হলে একক সমাধান থাকবে; (iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ হলে একাধিক সমাধান থাকবে।

(ঙ) ∇^3 এর তিনটি ভেক্টর লিখ যা যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল।

উত্তর : ভেক্টরগুলো হলো (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)

(চ) বর্গ ম্যাট্রিক্সের আইগেন ভেক্টরের সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : মনে করি F ফিল্ডে A একটি $n \times n$ ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং λ একটি A এর আইগেন মান। যদি এটি অশূন্য কলাম ভেক্টর $v \in F^n$ বিদ্যমান থাকে যেন $Av = \lambda v$ হয়। যেখানে **v** কে আইগেন মান λ সাপেক্ষে A এর আইগেন ভেক্টর বলে।

(ছ) যোগাশ্রয়ী চিত্রণ এর প্রতিচ্ছবি কাকে বলে?

উত্তর : $T : v(F) \to u(F)$ যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের ইমেজ বা প্রতিচ্ছবি ImT দ্বারা সূচিত করা হয় যেখানে $\mathrm{Im}T = \{\mathbf{u} \in u(F) : T(\mathbf{v}) = \mathbf{u}, v \in v(F)\}$.

(জ) ক্যালি–হ্যামিল্টন তত্ত্বটি লিখ।

উত্তর : v (F) ভেক্টর জগতের দুইটি উপজগত U ও W এর প্রত্যক্ষ যোগ $V = U \oplus W$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়, তা এরূপভাবে বিদ্যমান হবে যে, প্রত্যেক ভেক্টর $\mathbf{v} \in V$ কে একক এবং কেবলমাত্র একক $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, $u \in U$, $\mathbf{w} \in W$ আকারে প্রকাশ করা যায়।

(ঝ) ভেক্টর উপ-জগতের সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : মনে করি v(F) ভেক্টর জগতের একটি অশূন্যক উপসেট w. যদি v(F) ও w(F) একই ভেক্টর যোগ ও স্কেলার গুণন প্রক্রিয়ায় ভেক্টর জগত হয় তাহলে w কে v(F) এর উপজগত বলা হয়।

(ঞ) দেখাও যে, $F(x, y) = (x + 1, 2y, x + y)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $F : \nabla^2 \to \nabla^3$ তিনটি যোগাশ্রয়ী নয়।

উত্তর : ধরি, $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$

$$\mathbf{v} = (4, 5, 6)$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (5, 7, 9)$$

$$T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = (2, 4, 3) + (5, 10, 9)$$

$$= (7, 14, 12)$$

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(5, 7, 9)$$

$$= 6, 14, 12$$

$\therefore T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \neq T(\mathbf{u} + \mathbf{v})$

সুতরাং T যোগাশ্রয়ী নয়।

(ট) যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের নালিটি কাকে বলে?

উত্তর : $T : V(F) \to U(F)$ যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের কার্নেল, $\mathrm{Ker}T = \{\mathbf{v} \in V(F) : T(\mathbf{v}) = 0 \in U(F)$ এর মাত্রাকে নালিটি বলে।

(ঠ) $A = \begin{bmatrix} 13 & -1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$ এর স্বভাবী ম্যাট্রিক্স লিখ।

উত্তর : A এর স্বভাবী ম্যাট্রিক্স : $\lambda I_2 - A = \begin{bmatrix} \lambda - 13 & 1 \\ -1 & \lambda - 11 \end{bmatrix}$

খ-বিভাগ

যে কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও— ৪ × ৫ = ২০

২। A ও B অব্যতিক্রম বর্গাকার ম্যাট্রিক্স হলে, প্রমাণ কর যে, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

৩। $u = (-1, 2, 5)$ এবং $v = (1, 5, 7)$ হলে, $\| u \|$, $\| v \|$ এবং u, v নির্ণয় কর।

৪। λ ও μ এর উপর এরূপ শর্ত নির্ণয় কর যেন নিম্নলিখিত সমীকরণ মালার (i) একটি অনন্য সমাধান থাকে (ii) একাধিক সমাধান থাকে।

৫। $S = \{(a, b, c) : a^2 + b^2 + c^2 \le 1, a, b, c \in \nabla\}$ সেটটি ∇ ভেক্টর জগতের উপজগত কিনা পরীক্ষা কর।

৬। একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর $T : \nabla^3 \to \nabla^4$ নির্ণয় কর যাহার ImT $\{(1, 2, 0; -4), (2, 0, -1, -3)\}$ দ্বারা সৃজিত।

৭। $\{f_1 = (1, 1, 1), f_2 = (1, 1, 0), f_3 = (1, 0, 0)\}$ ভিত্তির সাপেক্ষে $T : \nabla^3 \to \nabla^3$ যোগাশ্রয়ী অপারেটরের ম্যাট্রিক্স রূপায়ন কর, যা $T(x, y, z) = (2x + z, x - 4y, 3x)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

৮। দেখাও যে, নিম্নের ম্যাট্রিক্সটির আইগেন মানগুলো বাস্তব হবে,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 3+i \\ 1+i & 2i & -3-i \\ 3-i & -2i & -2 \end{pmatrix}$$

৯। $\nabla^3 \to \nabla^3$ একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর $T(x, y, z) = (y + z, x - 2y, 2z)$ দ্বারা বর্ণিত T এর ব্যাংক ও শূন্যত্ব নির্ণয় কর।

গ–বিভাগ

যে কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও— ১০ × ৫ = ৫০

১০। ধরি, একটি ভেক্টর জগত v(F) এর সসীম মাত্রার উপ-জগৎ U এবং w তাহলে দেখাও যে, $\dim (U + W) = \dim U + \dim W - \dim (U \cap W)$

১১। নিম্নের ম্যাট্রিক্সটির ইচালন অফার নির্ণয় কর : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & -6 & 5 \end{bmatrix}$

১২। K এর এরূপ মান নির্ণয় কর যার জন্য নিম্ন লিখিত একগত বিশিষ্ট সমীকরণ জোটের (i) সমাধান না থাকে (ii) একাধিক সমাধান থাকে (iii) অনন্য সমাধান থাকে।

$$\begin{cases} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

১৩। যদি u, v এবং w যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল হয়, তবে দেখাও যে, $u + v - 3w$, $u + 3v - w$ এবং যোগাশ্রয়ী $v + w$ অনির্ভরশীল।

১৪। ধরি, $T ঃ \nabla^3 - \nabla^3$ একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর যেখানে $T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$ তবে ImT ও kerT এর ভিত্তি ও মাত্রা নির্ণয় কর।

১৫। $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির জন্য ক্যালি হ্যামিল্টনের উপপাদ্যটির সত্যতা যাচাই কর।

১৬। $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 24 & 8 & -6 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির আইগেন মান ও সংশ্লিষ্ট আইগেন ভেক্টরসমূহ নির্ণয় কর।

১৭। ক্যালি-হ্যামিল্টনের উপপাদ্যটি বর্ণনাসহ প্রমাণ কর।