বিএসসি (অনার্স) প্রথম বর্ষ পরীক্ষা–২০১৫

লিনিয়ার এলজাবরা ▸ বিষয় কোড : ২১৩৭০৫

ক-বিভাগ

১। যেকোনো ১০ টি প্রশ্নের উত্তর দাও— ১ × ১০ = ১০

(ক) ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : কোনো একটি ম্যাট্রিক্সের সারিকে কলাম এবং কলামকে সারিতে রূপান্তর করলে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স বলে। একে A^T দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(খ) লম্ব ম্যাট্রিক্সের উদাহণ দাও।

উত্তর : $A = \theta \begin{bmatrix} \text{Cos}\,\theta & \text{Sin}\,\theta \\ -\text{Sin}\,\theta & \text{Cos}\,\theta \end{bmatrix}$ একটি উলম্ব ম্যাট্রিক্স।

(গ) বেজোড় ক্রমের স্কিউ প্রতিসাম্য নির্ণয়ের মান কত।

উত্তর : শূন্য।

(ঘ) ∇^n এ দুইট ভেক্টরের অন্তর্গত কোণ নির্ণয়কের সূত্রটি লিখ।

উত্তর : u ও v দুইটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে, $\theta = \text{Cos}^{-1}\left(\frac{\mathbf{u.v}}{\|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|}\right)$

(ঙ) কসি সোয়ার্জের অসমতাটি লিখ।

উত্তর : $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \nabla^n$ হয় তাহলে, $|\mathbf{u.v}| \le \|u\|\,\|v\|$.

(চ) অংসগত রৈখিক সমীকরণ জোট বলতে কী বুঝায়?

উত্তর : একটি যোগাশ্রয়ী সমীকরণ জোটকে অসঙ্গত বলা হবে যদি জোটের কোনো সমাধান বিদ্যমান না থাকে।

(ছ) ধরি, v(F) এর দুইটি উপজগত S ও T। S ∪ T কী V(F) এর উপজগত?

উত্তর : V এর দুইটি উপজগত S ও T হলে, S ∪ T, V(F) এর উপজগত হবে।

(জ) ভেক্টরের যোগাশ্রয়ী সমাবেশ বলতে কী বুঝ?

উত্তর : মনে করি, F ফিল্ডে V একটি ভেক্টর জগত যেখানে $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ এবং $a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$। যদি $a_1v_2 + \ldots + a_nv_n = \mathbf{v} \in F$ হয় তবে $\mathbf{v}$ কে $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ ভেক্টরগুলোর যোগাশ্রয়ী সমাবেশ বলা হয়।

(ঝ) z অক্ষের ভিত্তি ও মাত্রা কত?

উত্তর : z অক্ষের ভিত্তি = {(0, 0, 1)}, এবং মাত্রা = 1

(ঞ) যাগাশ্রয়ী রূপান্তরের ক্ষেত্রে র‌্যাংক ও নালিটির মধ্যে সম্পর্ক লিখ।

উত্তর : র‌্যাংক ও নালিটির মধ্যে সম্পর্ক হল : Rank (T) + Nullity (T) = dim (V (F))

(ট) ব্যতিক্রমী যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : মনে করি, $T : U \to V$ একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর। যদি U এর কোনো অশূন্য উপাদানের ছবি শূন্য হয় তবে তাকে ব্যতিক্রম যোগাশ্রয়ী রূপান্তর বলা হয়।

(ঠ) বর্গ ম্যাটিক্সের আইগেন মান এর সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : মনে করি F ফিল্ডে A একটি $n \times n$ ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং λ একটি A এর আইগেন মান। যদি এটি অশূন্য কলাম ভেক্টর $v \in F^n$ বিদ্যমান থাকে যেন $Av = \lambda v$ হয়। যেখানে $\mathbf{v}$ কে আইগেন মান λ সাপেক্ষে A এর আইগেন ভেক্টর বলে।

খ-বিভাগ

যে কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও— ৪ × ৫ = ২০

২। A ও B একই ক্রমের বর্গাকার ম্যাট্রিক্স হলে প্রমাণ কর যে, $(AB)^t = B^tA^t$

৩। মনে করি, u = (3 − 7i, 2i − 1, i) এবং v = (4 − i, 11 + 2i, 8 − 3i)। তাহলে, u.v এবং ‖ u − v | এর মান নির্ণয় কর।

৪। নিম্নের একঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধান কর :

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 9 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 + 8x_4 &= 10 \end{aligned}\right\}$$

৫। যদি ভেক্টর জগৎ V (F) এর দুটি উপজগৎ S এবং T হয় তবে দেখাও যে S ∩ T এবং V (F) এর উপজগৎ হবে।

৬। দেখাও যে, {(1, 1, 2), (1, 0, 1), (2, 1, 3)} ভেক্টরকে ∇^3 তে যোগাশ্রয়ী নির্ভরশীল।

৭। {(2, 0, 1), (1, 1, 1)} সেটটিকে ∇^3 ভেক্টর জগতের একটি ভিত্তিতে বর্ধিত কর।

৮। মনে করি, $T : \nabla^3 \to \nabla^2$ একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর এবং $T(1, 1, 1) = (2, 2)$, $T(1, 0, 1) = (1, 1)$, $T(0, 0, 1) = (0, 1)$, $T(x, y, z)$ নির্ণয় কর।

৯। $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির র‍্যাংক নির্ণয় কর।

গ–বিভাগ

যে কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও– **১০ × ৫ = ৫০**

১০। ল্যাপ্লাসের পদ্ধতি ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে,

$$\begin{pmatrix} a^2+\lambda & ab & ac & ad \\ ab & b^2+\lambda & bc & bd \\ ac & bc & c^2+\lambda & cd \\ ad & bd & cd & d^2+\lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \lambda)$$

১১। α ও β এর উপর এরূপ শর্ত নির্ণয় কর, যেন নিম্নলিখিত একঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ জোট (i) একটি অনন্য সমাধান থাকে, (ii) একাধিক সমাধান থাকে (ii) কোনো সমাধান থাকে না।

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 5 \\ 3x - y + \alpha z &= 2 \\ x + 7y - 6z &= \beta \end{aligned}\right\}$$

১২। (ক) যদি $v(F)$ ভেক্টর জগত হয়,তবে দেখাও যে, $\forall \alpha \in F$ এবং $u \in v$

(খ) দেখাও যে, $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ভেক্টর সেটটি ∇^3 এর ভিত্তি।

১৩। মনে কর, $v = \{(a, b, c, d)\} : b + c + d = 0 \}$, $w = \{(a, b, c, d) : a + b = 0, c = 2d\}$ হলে ∇^4 এর দুইটি উপজগত (i) v, (ii) w, (iii) $v \cap w$ এবং (iv) $v + w$ এর ভিত্তি ও মাত্রা নির্ণয় কর।

১৪। মনে কর $v(F)$ একটি সসমী মাত্রার ভেক্টর জগত এবং $T : v(F) \to U(F)$ একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর। তাহলে দেখাও যে, $\dim(\text{Im } T) + \dim(\text{der } T) = \dim(v(F))$.

১৫। $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর। বিপরীত ম্যাট্রিক্স কী অনন্য।

১৬। মনে কর, $T : \nabla^3 \to \nabla^3$ একটি যোগাশ্রয়ী সংঘটক যা $T(x,y,z) = (2x - 3x + 4z, 5x - y - 2z, 4x + 7y)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। $\{(f_1 = (1, 1, 1), f_2 = (1, 1, 0), f_3 = (1, 0, 0)\}$ ভিত্তির সাপেক্ষে T এর ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর। এবং যে কোনো ভেক্টর $v \in \nabla^3$ এর জন্য যাচাই কর। যে, $[T]_f [v]_f = [T(v)]_f$

১৭। $A \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির সকল আইগেনমান ও প্রত্যেক আইগেনের সংশ্লিষ্ট আইগেন জগতের একটি ভিত্তি নিণয় কর। A ম্যাট্রিক্সটির কর্ণকীকরণযোগ্য কিনা যুক্তিসহ উল্লেখ কর।