বিএসসি (অনার্স) প্রথম বর্ষ পরীক্ষা–২০১৬

লিনিয়ার এলজাবরা ▶ বিষয় কোড : ২১৩৭০৫

ক-বিভাগ

১। যেকোনো ১০ টি প্রশ্নের উত্তর দাও– **১ × ১০ = ১০**

(ক) একক বা অভেদক ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : যদি n ক্রমের বর্গাকার ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণের সকল পদ 1 এবং অবশিষ্ট সকল পদ শূন্য হয়, তবে এই ম্যাট্রিক্সকে একক বা অভেদক ম্যাট্রিক্স বলে।

(খ) শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : একটি n ক্রমের বর্গাকার ম্যাট্রিক্স A কে শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স বলা হলে যদি $A^p = [O]_{n\times n}$, $P \in N$ হয়। যদি সর্বনিম্ন যোগবোধক পূর্ণসংখ্যা P এর জন্য $A^p = [O]_{n\times n}$ $P \in N$ হয়, তবে ম্যাট্রিক্স A কে সূচক P এর শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স বলে।

(গ) ম্যাট্রিক্সের র‍্যাংক কী?

উত্তর : যে কোনো ম্যাট্রিক্স কে সারি বা কলাম ইচালন আকারে প্রকাশ করলে তার অশূন্য সারি বা কলাম সংখ্যাকে ম্যাট্রিক্সের সারি বা কলাম র‍্যাংক বলে। এই সারি বা কলাম র‍্যাংককে ম্যাট্রিক্সের র‍্যাংক বলা হয়।

(ঘ) ∇^n এর ভেক্টর নর্ম বা দৈর্ঘ্যের সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : ∇^n এ $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ভেক্টরের নর্ম বা দৈর্ঘ্যকে $\|\mathbf{u}\|$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়, যা নিম্নভাবে সংজ্ঞায়িত,

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}\,.\,\mathbf{u}}$$
$$= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

(ঙ) সমতলীয় ভেক্টর কী?

উত্তর : দ্বিমাত্রিক বাস্তব জগত ∇^2 দ্বারা দ্বিমাত্রিক স্থানাংক জ্যামিতিতে সমতল সূচিত হয়। সাধারণভাবে ∇^2 দ্বারা xy সমতল নির্দেশিত হয়। কাজেই ∇^2 এর ভেক্টরকে সমতলীয় ভেক্টর বলে।

(চ) $\mathbf{u} = (3 - 7i, 2i, -1 + i)$ এবং $\mathbf{v} = (4 - i, 11 + 2i, 8 - 3i)$ হলে $\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}$ নির্ণয় কর।

উত্তর : $\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v} = (3 - 7i, 2i, -1 + i)\,.\,(4 - i, 11 + 2i, 8 - 3i)$

$$= (3 - 7i)(4 + i) + 2i(11 - 2i) + (-1 + i)(8 + 3i)$$
$$= 12 + 3i - 28i + 7 + 22i + 4 - 8 - 3i + 8i - 3$$
$$= 12 + 2i.$$

(ছ) উপজগতের সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : মনে করি v(F) ভেক্টর জগতের একটি অশূন্যক উপসেট w. যদি v(F) ও w(F) একই ভেক্টর যোগ ও স্কেলার গুণন প্রক্রিয়ায় ভেক্টর জগত হয় তাহা হইলে w কে v(F) এর উপজগত বলা হয়।

(জ) যোগাশ্রয়ী নির্ভরশীল ভেক্টরের সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : মনে করি v(F) ভেক্টর জগত যেখানে $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots\ldots, \mathbf{v}_n \in v$ এবং $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n \in F$. যদি $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots\ldots + \alpha_n v_n = 0$ হয় এবং $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n\}$ সেটের প্রত্যেকটি উপাদান শূন্য হয় তবে ভেক্টরগুলিকে যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল ভেক্টর বলে।

(ঝ) ভেক্টর জগতের ভিত্তি বলতে কী বুঝ?

উত্তর : মনে করি, V (F) ভেক্টর জগত এবং $S = \{v_1, v_2 \ldots\ldots v_n\}$ উহার একটি সসীম উপসেট। যদি S একটি V (F) এর সৃজক এবং S যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল হয় তবে S কে V (F) এর ভিত্তি বলা হয়।

(ঞ) যোগাশ্রয়ী অপারেটরের সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : v (F) ভেক্টর জগতের ক্ষেত্রে $T : v(F) \to v(F)$ রূপান্তরটিকে যোগাশ্রয়ী অপারেটর বলা হবে যদি $\forall\, \mathbf{u,v} \in V \Rightarrow T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ এবং $F(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$ হয়।

(ট) যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের র‍্যাংক বলতে কী বুঝ?

উত্তর : র‍্যাংক ও নালিটির মধ্যে সম্পর্ক হল : Rank (T) + Nullity (T) = dim (V (F))

(ঠ) স্বভাবী বহুপদী কাকে বলে?

উত্তর : A একটি n ক্রমের বর্গাকার ম্যাট্রিক্স এবং $\lambda \in F$ হইলে $|\lambda I_n - A|$ কে A এর স্বভাবী বহুপদী বলে।

খ-বিভাগ

যে কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও– **৪ × ৫ = ২০**

২। A এবং B অব্যতিক্রম বর্গাকার ম্যাট্রিক্স হলে, প্রমাণ কর যে, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

৪। দেখাও যে, বিজোড় ক্রমের প্রত্যেক স্কিউ প্রতিসাম্য নির্ণয়কের মান শূন্য।

৫। নিম্নের একঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধান কর।

$$\left.\begin{array}{l} x+2y-3z=6 \\ 2x-y+4z=2 \\ 4x+3y-2z=14 \end{array}\right\}$$

৬। (3, 9, − 4, − 2) ভেক্টরটিকে (1, − 2, 0, 3), (2, 3, − 1, 0) এবং (2, − 1, 2, 1) ভেক্টরগুলোর যোগাশ্রয়ী সমাবেশরূপে প্রকাশ করা যায় কিনা নির্ধারণ কর।

৭। দেখাও যে, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ এবং $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সদ্বয়ের একই সারি জগত বিদ্যমান।

৮। যদি $T : V(F) \to U(F)$ একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর হয়। তবে দেখাও যে, ImT একটি U (F) এর উপজগত।

৯। দেখাও যে, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 3+i \\ 1+i & 3 & 2i \\ 3-i & -2i & -2 \end{pmatrix}$ এর আইগেন মানগুলো বাস্তব।

গ–বিভাগ

যে কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও– **১০ × ৫ = ৫০**

১০। প্রমাণ কর যে, $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|, \forall\, u, v \in \nabla^n$

১১। x এর এরূপ মান নির্ণয় কর যার জন্য নিম্নলিখিত একঘাতবিশিষ্ট সমীকরণ জোটের– (i) সমাধান নেই, (ii) একাধিক সমাধান থাকে, (iii) একক সমাধান থাকে।

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ 2x+3y+\lambda z=3 \\ x+\lambda y+3z=2 \end{array}\right\}$$

১২। যদি V (F) একটি ভেক্টর জগত হয়, তবে দেখাও যে, (i) যদি $ku = 0$ হয় তবে, $k = 0$ অথবা, $u = 0$ যেখানে $k \in F$ এবং $u \in V$

১৩। নিম্নবর্ণিত উপসেটগুলো সংশ্লিষ্ট ভেক্টর জগতের উপজগত কিনা পরীক্ষা কর।

(i) $S = \{(a, b, c) : a^2 + b^2 + c^2 \le 1, a, b, c \in \nabla\} \subseteq \nabla^3$

(ii) $T = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \nabla\right\} \subseteq m^2$ যা 2 × 2 মাত্রার ম্যাট্রিক্স।

১৪। যদি ∇^4 এর দুইটি ভেক্টর উপজগত U এবং W যথাক্রমে {(1, 2, 1, 1), (1, 2, − 1, 2) এবং {(1, 2, 3, 0), (2, 2, 2, 2)} দ্বারা সৃজিত হয়, তবে U + W এর ভিত্তি এবং $U \cap W$ এর মাত্রা নির্ণয় কর।

১৫। ক্যালী-হ্যামিল্টনের উপপাদ্যটি বর্ণনাসহ প্রমাণ কর।

১৬। ∇ ফিল্ডে $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির আইগেন মান ও সংশ্লিষ্ট আইগেন ভেক্টর নির্ণয় কর। আরো বিপরীতযোগ্য একটি ম্যাট্রিক্স P নির্ণয় কর P, যাতে P–1 AP কর্ণ ম্যাট্রিক্স হয়।