বিএসসি (অনার্স) প্রথম বর্ষ পরীক্ষা—২০১৭

বিষয় : (লিনিয়ার এলজ্যাবরা)

(Linear Algebra)

বিষয় কোড : ২১৩৭০৫

[দ্রষ্টব্য: প্রতিটি বিভাগের প্রশ্নের উত্তর ধারাবাহিকভাবে লিখতে হবে।]

সময় : ৪ ঘণ্টা পূর্ণমান—৮০

ক-বিভাগ

১। নিচের যেকোনো ১০টি প্রশ্নের উত্তর দাও— ১ × ১০ = ১০

(ক) স্কেলার ম্যাট্রিক্স সংজ্ঞায়িত কর।

[Define scalar matrix.]

উত্তর : যে কর্ণ ম্যাট্রিক্সের অশূন্য পদগুলি সমান, তাকে স্কেলার ম্যাট্রিক্স বলে। যেমন,

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$ একটি স্কেলার ম্যাট্রিক্স।

(খ) স্কিউ-প্রতিসাম্য নির্ণায়কের একটি উদাহরণ দাও।

[Give an example of skew-symmetric determinant.]

উত্তর : $$\begin{vmatrix} 0 & h & g \\ -h & 0 & f \\ -g & -f & 0 \end{vmatrix}$$ একটি স্কিউ প্রতিসাম্য নির্ণায়ক।

(গ) কখন একটি রৈখিক সমীকরণজোটের একের অধিক সমাধান থাকে?

[When a system of linear equations have more than one solution?]

উত্তর : যদি কোনো যোগশ্রেয়ী সমীকরণ জোটের ইচালন আকারে অশূন্য সারি সংখ্যার চেয়ে চলক সংখ্যার চেয়ে বেশি হয় তবে উক্ত সমীকরণ জোটের একাধিক সমাধান বিদ্যমান।

(ঘ) বিপরীতযোগ্য ম্যাট্রিক্স কী?

[What is invertible matrix?]

উত্তর : **বিপরীতযোগ্য ম্যাট্রিক্স :** একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A কে অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $|A| \neq 0$ হয়। আর যদি তা অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হয়, তখন তাকে বিপরীতযোগ্য ম্যাট্রিক্সও বলা হবে।

(ঙ) $u = (4, 0, 3)$ ও $v = (0, 0, 4)$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।

[Find the angle between two vectors $u = (4, 0, 3)$ and $v = (0, 0, 4)$.]

উত্তর : দেওয়া আছে, $\underline{u} = (4, 0, 3)$ ও $\underline{v} = (0, 0, 4)$

$\therefore$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $= \cos^{-1}\left(\frac{\underline{u}.\underline{v}}{||\underline{u}||\,||\underline{v}||}\right)$

$$= \cos^{-1}\left\{\frac{(4, 0, 3).(0, 0, 4)}{\sqrt{4^2+0^2+3^2}\sqrt{0^2+0^2+4^2}}\right\}$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{4+12}{\sqrt{16+9}\sqrt{16}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{16}{\sqrt{25}\sqrt{16}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{16}{5.4}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \text{ (Ans.)}$$

(চ) যদি $u \in \nabla^n$ হয়, তবে $||u||$ ও $< u, u >$ এর মধ্যে সম্পর্ক কী?

[If $u \in \nabla^n$, then what is the relation between $||u||$ and $< u, u >$?]

উত্তর : নির্ণেয় সম্পর্কটি হলো : $||u|| = \sqrt{<u, u>}$

(ছ) যোগাশ্রয়ীভাবে অনির্ভরশীল ভেক্টর সংজ্ঞায়িত কর।

[Define linearly independent vectors.]

উত্তর : মনে করি v(F) ভেক্টর জগত যেখানে $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n \in v$ এবং $\propto_1, \propto_2, \ldots\ldots, \propto_n \in F$. যদি $\propto_1 v_1 + \propto_2 v_2 + \ldots\ldots + \propto_n v_n = 0$ হয় এবং $\{\propto_1, \propto_2, \ldots\ldots \propto_n\}$ সেটের প্রত্যেকটি উপাদান শূন্য হয় তবে ভেক্টরগুলিকে যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল ভেক্টর বলে।

(জ) দুইটি উপজগতের প্রত্যক্ষ যোগ কী?

[What is the direct sum of two subspaces?]

উত্তর : **দুইটি উপজগতের প্রত্যক্ষ যোগ :** V(F) ভেক্টর জগতের দুইটি উপজগত U ও W এর প্রত্যক্ষ যোগ $V = U \oplus W$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়, যেখানে $V = U + W$ এরূপভাবে বিদ্যমান হবে যে, প্রত্যেক ভেক্টর $\underline{v} \in V$ কে একক এবং কেবলমাত্র একক $\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$, $\underline{u} \in W$ আকারে প্রকাশ করা যায়।

(ঝ) ভেক্টর জগতে সৃজকের সংজ্ঞা দাও।

[Define generator of a vector space.]

উত্তর : ভেক্টর জগতের সৃজক : মনে করি, V(F) একটি ভেক্টর জগত এবং $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots\ldots, \underline{v}_n\}$ তার একটি সসীম উপসেট। যদি $\underline{u} = \alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \ldots\ldots + \alpha_n\underline{v}_n$, $\forall \underline{u} \in V$ এবং $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n \in F$ হয়, তবে S কে V(F) এর সৃজক বলে।

(ঞ) ডাইমেনশন উপপাদ্যটি লিখ।

[Write down the dimension theorem.]

উত্তর : ডাইমেনশন উপপাদ্য : যদি কোন সসীম মাত্রার ভেক্টর জগত V(F) এর U ও W দুইটি উপজগত হয় তবে $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

(ট) সদৃশ ম্যাট্রিক্স বলতে কী বুঝ?

[What do you mean by similar matrices?]

উত্তর : যদি A ও B দুইটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় এবং p এইরূপ একটি বিপরীতযোগ্য ম্যাট্রিক্স যেন $B = p^{-1}Ap$ হয়, তা হলে B ম্যাট্রিক্সকে A এর সদৃশ ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

(ঠ) আইগেন জগতের সংজ্ঞা দাও।

[Define eigenspace.]

উত্তর : আইগেন জগত : যদি A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং $\lambda \in F$, A এর একটি আইগেন মান হয় তবে $(\lambda I - A)\underline{x} = \underline{0}$ সমীকরণ জোটের সমাধান জগতকে আইগেন মান λ এর প্রেক্ষিতে A এর আইগেন জগত বলে।

খ-বিভাগ

যেকোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও— ৩ × ৫ = ১৫

২। দেখাও যে, প্রত্যেক বর্গাকার ম্যাট্রিক্স A-কে একটি প্রতিসাম্য ও একটি স্কিউপ্রতিসাম্য ম্যাট্রিক্সের যোগফলরূপে প্রকাশ করা যায়।

[Show that every square matrix A can be expressed as the sum of a symmetric matrix and a skew-symmetric matrix.]

৩। যদি $u = (1, 1, 1)$ এবং $v = (0, 1, -2)$ হয়, তবে দেখাও যে, $\| u + v \| \le \| u \| + \| v \|$.

[If $u = (1, 1, 1)$ and $v = (0, 1, -2)$ then show that, $\| u + v \| \le \| u \| + \| v \|$.]

৪। নিম্নোক্ত একঘাত সমীকরণজোটের সমাধানযোগ্যতা যাচাই কর এবং সমাধান কর :

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 1 \\ 3x + y - z &= 2 \\ x + 4y - 6z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

[Examine for consistency the following system of linear equations and solve :_ $\left.\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 1 \\ 3x + y - z &= 2 \\ x + 4y - 6z &= 1 \end{aligned}\right\}$]

৫। উপজগতের দ্বিতীয় মৌলিক উপপাদ্য বর্ণনা ও প্রমাণ কর।

[State and prove 2nd fundamental theorem of subspace.]

৬। যদি $S = \{(a, b, c) : a = b = c\}$ এবং $T = \{(0, b, c) : b, c \in \nabla\}$ দুইটি উপজগত হয়, তবে দেখাও যে, $\nabla^3 = S \oplus T$.

[If $S = \{(a, b, c) : a = b = c\}$ and $T = \{(0, b, c) : b, c \in \nabla\}$ are two subspaces then show that, $\nabla^3 = S \oplus T$.]

৭। $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির সকল আইগেনমান নির্ণয় কর।

[Find the eigenvalues of the matrix $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$]

৮। $\{(1, 2, -3), (2, 0, -1), (7, 6, -11)\}$ সেটটি যোগাশ্রয়ীভাবে নির্ভরশীল অথবা অনির্ভরশীল কি না যাচাই কর।

[Test whether the set $\{(1, 2, -3), (2, 0, -1), (7, 6, -11)\}$ is linearly depedent or independent.]

৯। দেখাও যে, সসীম মাত্রার ভেক্টরজগতের প্রত্যেক ভিত্তিতে সমানসংখ্যক ভেক্টর থাকে।

[Show that, every basis of a finite dimensional vector space has the same number of vectors.]

গ-বিভাগ

যেকোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও— ৭ × ৫ = ৩৫

১০। কসি-সোহার্যের অসমতাটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর।

[State and prove Cauchy-Schwarz inequality.]

১১। ব্লক ম্যাট্রিক্স পদ্ধতিতে $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

[Find the inverse matrix of $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ by block matrix method.]

১২। m ও n এর এরূপ মান নির্ণয় কর যেন নিম্নলিখিত সকল সমীকরণজোটের (i) একাধিক সমাধান থাকে, (ii) একটি অনন্য সমাধান থাকে এবং (iii) সমাধান থাকে না :– $2x + 3y + z = 5,\ 3x - y + mz = 2,\ x + 7y - 6z = n$.

[Determine the values of m and n so that the following system of linear equations have (i) more than one solution, (ii) a unique solution and (iii) no solution : $2x + 3y + z = 5,\ 3x - y + mz = 2,\ x + 7y - 6z = n$.]

১৩। যদি একটি ভেক্টর জগত $V(F)$ এর সসীম মাত্রার দুইটি উপজগত A এবং B হয়, তবে দেখাও যে,

$\dim(A + B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$.

[If A and B be the finite dimensional subspaces of vector space $V(F)$, then show that, $\dim(A + B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$.]

১৪। নিম্নের একঘাতবিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধান জগতের একটি ভিত্তি ও মাত্রা নির্ণয় কর–

$x + 2y + 2z - s + 3t = 0$
$x + 2y + 3z + s + t = 0$
$3x + 6y + 8z + s + 5t = 0$

[Find a basis and dimension of the solution space of the following system of linear equations :–

$x + 2y + 2z - s + 3t = 0$
$x + 2y + 3z + s + t = 0$
$3x + 6y + 8z + s + 5t = 0$]

১৫। মনে কর, $T : \nabla^3 \to \nabla^3$ একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর যা নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত, $T(x,y,z) = (2x,\ 4x - y,\ 2x + 3y - z)$. দেখাও যে, T বিপরীতযোগ্য এবং T^{-1} এর জন্য একটি সূত্র নির্ণয় কর।

[Let $T : \nabla^3 \to \nabla^3$ be a linear transformation defined by $T(x,y,z) = (2x,\ 4x - y,\ 2x + 3y - z)$. Show that T is invertible and find a formula for T^{-1}.]

১৬। মনে কর, $T : V(F) \to F(F)$ একটি যোগাশ্রয়ী অপারেটর এবং $V(F)$ ভেক্টর জগতের ভিত্তি $\{e_1, e_2, \ldots\ldots e_n\}$ তাহলে দেখাও যে, $[T]_e [v]_e = [T(v)]_e,\ \forall\, v \in V(F)$.

[Let $T : V(F) \to V(F)$ be a linear operator and $\{e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n\}$ be a basis of $V(F)$, than show that, $[T]_e [v]_e = [T(v)]_e,\ \forall\, v \in V(F)$.]

১৭। ম্যাট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ এর জন্য কেইলী-হ্যামিল্টন উপপাদ্য যাচাই কর এবং এই উপপাদ্য ব্যবহার করে A^{-1} নির্ণয় কর।

[Verify Cayley-Hamilton theorem for the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ and find A^{-1} using this theorem.]

ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয় অধিভুক্ত কলেজ

বিএসসি (সম্মান) ১ম বর্ষ পরীক্ষা-২০১৭

বিষয় : গণিত

বিষয় কোড : ২১৩৭০৫

শিরোনাম : লিনিয়র এলজ্যাবরা

সময় : ৩ ঘণ্টা পূর্ণমান : ৬০

[দ্রষ্টব্য : প্রত্যেক বিভাগের প্রশ্নের উত্তর ধারাবাহিকভাবে লিখতে হবে।]

ক-বিভাগ

১। যেকোনো ১০টি প্রশ্নের উত্তর দাও— ১ × ১০ = ১০

(ক) A ও B ম্যাট্রিক্স হলে, AB বিদ্যমান থাকার শর্ত লেখ।

[If A and B are two matrices then write the condition for existence of AB.]

উত্তর : দুইটি ম্যাট্রিক্স গুণনযোগ্য অর্থাৎ গুণ করা যাবে যদি প্রথম ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা এবং দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সের সারিসংখ্যা সমান হয়।

(খ) স্কিউ হারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্সের উদাহরণ দাও?

[Give an example of skew-Hermitian matrix.]

উত্তর : একটি বর্গাকার ম্যাট্রিক্স A কে স্কিউ হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $(\overline{A})^T = -A$ হয়।

উদাহরণ : ধরি, $A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$

এখানে, $(\overline{A})^T = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = -A$

সুতরাং, A একটি স্কিউ হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স।

(গ) নির্ণায়কের সহগুণকের সংজ্ঞা দাও?

[Define cofactor of a determinant.]

উত্তর : $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & --- & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & --- & a_{2n} \\ --- & --- & --- & --- \\ a_{n1} & a_{n2} & --- & a_{nn} \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের a_{rs} পদের চিহ্নযুক্ত অনুরাশি A_{rs} কে ঐ পদের সহগুণক বলা হয় যেখানে $A_{rs} = (-1)^{r+s} \times (\Delta$ এ a_{rs} উপাদানের অনুরাশি)।

(ঘ) ∇^n এ ভেক্টর বলতে কী বুঝ?

[What do you P mean by vectors in ∇^n.]

উত্তর : যদি n মাত্রিক বাস্তব জগত V^n -এ $u \in V$ এবং $\mathbf{u} = (u_1, u_2 .... u_n)$ হয় তবে **u** কে ∇^n-এ ভেক্টর বলা হয়।

(ঙ) কখন একটি রৈখিক সমীকরণ জোটের একাধিক সমাধান থাকবে?

[When a system of linear equations has more than one solution?]

উত্তর : যদি কোনো যোগাশ্রয়ী সমীকরণ জোটের ইচালন আকারে অশূন্য সারি সংখ্যার চেয়ে চলক সংখ্যার চেয়ে বেশি হয় তবে উক্ত সমীকরণ জোটের একাধিক সমাধান বিদ্যমান।

(চ) ভেক্টর জগতের উপজগতের সংজ্ঞা দাও।

[Define subspace of a vector space.]

উত্তর : মনে করি, V(F) ভেক্টর জগতের একটি অশূন্যক (non-empty) উপসেট W. এখানে যদি V(F) ও W(F) একই ভেক্টর যোগ ও স্কেলার গুণন প্রক্রিয়ায় ভেক্টর জগত হয়, তাহলে W কে V(F) এর উপজগত বলা হয়।

(ছ) যোগাশ্রয়ী নির্ভরশীল ভেক্টরের সংজ্ঞা দাও।

[Define linearly dependent vectors.]

উত্তর : মনে করি, V(F) ভেক্টর জগৎ যেখানে $V_1, V_2, ---- V_n \in V$ এবং $\alpha_1, \alpha_2, ----, \alpha_n \in F$. যদি $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + ------ \alpha_n V_n = 0$ হয় এবং $\{\alpha_1, \alpha_2, ------, \alpha_n\}$ সেটের কমপক্ষে একটি উপাদান শূন্য না হয়, তবে $V_1, V_2, ---, V_n$ ভেক্টরগুলিকে যোগাশ্রয়ী নির্ভরশীল ভেক্টর বলে।

(জ) z- অক্ষের ভিত্তি ও মাত্রা লেখ।

[Write the basis and dimension of z-axis.]

উত্তর : Z অক্ষের ভিত্তি = $\{(0, 0, 1)\}$ এবং মাত্রা = 1.

(ঝ) ম্যাট্রিক্সের সারি জগতের মাত্রার সংজ্ঞা দাও।

[Define the dimension of row space of matrix.]

উত্তর : কোনো ম্যাট্রিক্সকে সারি ক্রিয়ার মাধ্যমে ইচালন আকারে রূপান্তরের পর অশূন্য সারির সেটকে ম্যাট্রিক্সের সারি জগতের ভিত্তি এবং ভিত্তি ভেক্টরের সংখ্যাকে মাত্রা বলা হয়।

(ঞ) যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের কার্নেল এর সংজ্ঞা দাও।

[Define kernel of linear mapping.]

উত্তর : $T : V(F) \to U(F)$ যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের কার্নেল, KerT দ্বারা সূচিত করা হয় যেখানে $\text{Ker } T = \{v \in V(F) : T(v) = 0 \in V(F)\}$.

(ট) কখন একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর কে আইসোমরফিজম বলা হয়?

[When a linear mapping is said to be isomorphic?]

উত্তর : একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর one – one এবং onto হলে তাকে আইসোমরফিক বলা হয়।

(ঠ) যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের ক্ষেত্রে আইগেনমান ও আইগেন ভেক্টরের সংজ্ঞা দাও।

[Define eigenvalue and eigenvector of a linear operator.]

উত্তর : মনে করি F ফিল্ডে V ভেক্টর জগত এবং $T : V(F) \to V(F)$ একটি লিনিয়ার অপারেটর। যদি $\lambda \in F$ এবং একটি অশূন্য ভেক্টর $V \in V$ বিদ্যমান থাকে যেন $T(V) = \lambda v$ হয় তবে স্কেলার λ কে T এর আইগেন মান বলে।

ধরি, $T : V(F) \to V(F)$ একটি লিনিয়ার অপারেটর যেখানে F ফিল্ডে V ভেক্টর জগত এবং λ একটি T এর আইগেন মান। যদি একটি অশূন্য ভেক্টর $v \in V$ বিদ্যমান থাকে যেন $T(V) = \lambda v$ হয় তবে v কে আইগেন মান λ সাপেক্ষে T এর আইগেন ভেক্টর বলে।

খ-বিভাগ

যেকোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও— **৩ × ৫ = ১৫**

২। Cauchy-Schwartz-এর অসমতাটি প্রমাণ কর।

[Prove that Cauchy-Schwartz inequality.]

৩। দেখাও যে, প্রত্যেক বর্গ ম্যাট্রিক্সকে প্রতিসম ও অপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের যোগফল রূপে প্রকাশ করা যায়।

[Show that every square matrix can be written as a sum of symmetric and skew-symmetric matrix.]

৪। নিম্নের সমীকরণ জোটের সমাধান আছে কী? মন্তব্য কর : $\begin{aligned} x + y + 2z &= 8 \\ x - 2y + 3z &= 7 \\ 3x - 3y + 8z &= 16 \end{aligned}$

[Is there any solution of the following system of linear equations? Comment on it. $\begin{aligned} x + y + 2z &= 8 \\ x - 2y + 3z &= 7 \\ 3x - 3y + 8z &= 16 \end{aligned}$]

৫। দেখাও যে, $v = (5, -2, 1)$ হলো $v_1 = (-1, 2, 0)$, $v_2 = (3, 1, 2)$ এবং $v_3 = (0, 1, -1)$ ভেক্টরগুলোর যোগাশ্রয়ী সমাবেশ।

[Show that $v = (5, -2, 1)$ is a linear combination of the vectors $v_1 = (-1, 2, 0)$, $v_2 = (3, 1, 2)$ and $v_3 = (0, 1, -1)$.]

৬। $S = \{(a, b, c) \in R^3 : a + b + c = 0, 3b + 2c = 0\}$ সেটটি ভেক্টর জগৎ R^3 এর উপজগত কিনা পরীক্ষা কর।

[Examine whether the set $S = \{(a, b, c) \in R^3 : a + b + c = 0, 3b + 2c = 0\}$ is a subspace of R^3 or not.]

৭। দেখাও যে, ভেক্টর সমূহের সেট $\{(1, 1, 0), (1, -1, 0)\ (1, 1, -2)\}$, R^3 এর ভিত্তি।

[Show that the set of vectors $\{(1, 1, 0), (1, -1, 0)\ (1, 1, -2)\}$, is a basis of R^3.]

৮। দেখাও যে, রূপান্তর $T : R^3 \to R^2$, $T(x, y, z) = (z, x + y)$ যোগাশ্রয়ী।

[Show that the transformation $T : R^3 \to R^2$, $T(x, y, z) = (z, x + y)$ is linear.]

৯। দেখাও যে, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি কর্ণকীকরণ যোগ্য নয়।

[Show that the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ is not diagonalizable.]

গ-বিভাগ

যেকোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও— **১০ × ৫ = ৫০**

১০। ল্যাপলাসের পদ্ধতি ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix} a^2 + \lambda & ab & ac & ad \\ ab & b^2 + \lambda & bc & bd \\ ac & bc & c^2 + \lambda & cd \\ ad & bd & cd & d^2 + \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \lambda)।$$

[Use Lapace's method to prove that $\begin{vmatrix} a^2+\lambda & ab & ac & ad \\ ab & b^2+\lambda & bc & bd \\ ac & bc & c^2+\lambda & cd \\ ad & bd & cd & d^2+\lambda \end{vmatrix} =$ $\lambda^3(a^2+b^2+c^2+d^2+\lambda)$.]

১১। উপজগতের যোগ এবং প্রত্যক্ষযোগ সংজ্ঞায়িত কর। যদি $U = \{(a, b, c) \in R^3 : a = b = c\}$ এবং $W = \{(0, b, c) : b, c \in R\}$, R^3 এর দুটি উপজগত হয়, তবে দেখাও যে, $R^3 = U \oplus W$।

[Define sum and direct sum of subspaces. If $U = \{(a, b, c) \in R^3 : a = b = c\}$ and $W = \{(0, b, c) : b, c \in R\}$, R^3 are two subspaces of R^3 then show that $R^3 = U \oplus W$.]

১২। দেখাও যে কোনো ম্যাট্রিক্সের সারিমাত্রা ও কলাম মাত্রা পরস্পর সমান।

[Show that row rank and column rank of a martix are equal to each other.]

১৩। যদি $v = \{(a, b, c, d) \in R^4 : b - 2c + d = 0\}$ এবং $w = \{(a, b, c, d) \in R^4 : a = d, b = 2c\}$ এ দুটি উপজগত হয়, তবে v, w এবং $v \cup W$ এর ভিত্তি ও মাত্রা বাহির কর।

[If $v = \{(a, b, c, d) \in R^4 : b - 2c + d = 0\}$ and $w = \{(a, b, c, d) \in R^4 : a = d, b = 2c\}$ are two subspaces of R^4 then find the basis and dimension of v, w and $v \cup W$.]

১৪। যদি V (F) একটি সসীম মাত্রার ভেক্টর জগত এবং $T : V(F) \to U(F)$ একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর হয় তবে দেখাও যে, $\dim(V(F)) = \dim(Im\, T) + \dim(\text{Ker } T)$।

[Let V (F) be a finite dimensional vector space and $T : V(F) \to U(F)$ be a linear mapping then show that $\dim(V(F)) = \dim(Im\, T) + \dim(\text{Ker } T)$.]

১৫। যদি $T : R^3 \to R^3$ যোগাশ্রয়ী রূপান্তরটি $T(x, y, z) = (x + 2y - z, y - x, x - z)$ ভাবে সংজ্ঞায়িত হয় তবে, $Im(T)$ এবং $\text{Ker}(T)$ বাহির কর, আরও T এর র‍্যাংক ও শুণ্যতা বাহির কর।

[Let $T : R^3 \to R^3$ be the linear mapping defined by $T(x, y, z) = (x + 2y - z, y - x, x - z)$. Find $Im(T)$ and $\ker(T)$. Also find rank and nullity of T.]

১৬। Cayley-Hamilton উপপাদ্যের বর্ণনা ও প্রমাণ কর ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে।

[State and prove Cayley-Hamilton theorem.]

১৭। $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের সকল আইগেন মান ও প্রত্যেক আইগেন মানের জন্য সংশ্লিষ্ট আইগেন জগতের ভিত্তি নির্ণয় কর। A ম্যাট্রিক্সটি কর্ণকীকরণ যোগ্য কিনা? যুক্তিসহ উল্লেখ কর।

[Find the eigenvalues and a basis of eigen space corresponding to each eigenvalue of the matrix, $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ Is the matrix diagonalizable? Mention with reason.]