বিএসসি (অনার্স) প্রথম বর্ষ পরীক্ষা–২০১৮

বিষয় : (লিনিয়ার এলজ্যাবরা)

(Linear Algebra)

বিষয় কোড : ২১৩৭০৫

সময় : ৩ ঘণ্টা **পূর্ণমান : ৬০**

[দ্রষ্টব্য : একই বিভাগের বিভিন্ন প্রশ্নের উত্তর ধারাবাহিকভাবে লিখতে হবে। প্রয়োজনে চিহ্নিত চিত্র দিতে হবে।]

ক-বিভাগ

১। যেকোনো ১০টি প্রশ্নের উত্তর দাও– **১ × ১০ = ১০**

(ক) ম্যাট্রিক্স সংজ্ঞায়িত কর।

[Define matrix.]

উত্তর : কতগুলো উপাদানকে সারি এবং কলাম আকারে সাজিয়ে প্রথম বন্ধনী বা তৃতীয় বন্ধনী বা উলম্ব জোড়া বারের ভিতরে আবদ্ধ করাকে ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

(খ) প্রতিসাম্য নির্ণায়ক বলতে কী বুঝ?

[What do you mean by symmetric determinant?]

উত্তর : $\Delta = (a_{11}a_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{nn})$ নির্ণায়ককে প্রতিসাম্য নির্ণায়ক বলা হবে যদি $a_{ij} = a_{ji}$ হয়।

(গ) সারি ইচালন ম্যাটিক্সের একটি উদাহরণ দাও।

[Give an example of row echelon matrix.]

উত্তর : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & \end{bmatrix}$

(ঘ) রৈখিক সমীকরণের সংজ্ঞা দাও।

[Define linear equation.]

উত্তর : কোন সমীকরণ জোটকে ইচালন আকারে রূপান্তর করা হলে তখন এই সমীকরণকে রৈখিক সমীকরণ বলে।

(ঙ) $\Re^n$-এ দুইটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয়ের সূত্র লিখ।

[Write down the formula to find the distance between two vectors in $\Re^n$.]

উত্তর : $d(u, v) = \sqrt{|u_1 - v_1|^2 + |u_2 - v_2|^2 + 0 \ldots\ldots + |u_n - v_n|^2}$

(চ) ∇^3-এর উপজগতের একটি উদাহরণ দাও।

[Give an example of subspace of ∇^3.]

উত্তর : $W_1 = \{(x, y, z) ঃ x = 0\}$.

(ছ) ম্যাট্রিক্সের কলাম জগতের মাত্রা কী?

[What is the dimension of column space of a matrix?]

উত্তর : কোন ম্যাট্রিক্সের কলাম জগতের ভিত্তির কলাম ভেক্টর সংখ্যাকে ম্যাট্রিক্সের কলাম জগতের মাত্রা বলে।

(জ) যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের নালিটি কাকে বলে?

[What is called nullity of linear transformation?]

উত্তর : $T : V(F) \to U(F)$ যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের কার্নেল, $\text{Ker}T = \{v \in V(F) : T(v) = 0 \in U(F)$ এর মাত্রাকে নালিটি বলে।

(ঝ) কখন একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর সমচিত্রণ হবে?

[When a linear transformation is called isomorphic?]

উত্তর : যখন $T(\underline{u}) + T(\underline{v}) = T(\underline{u} + \underline{v})$ হয় এবং $T(\times \underline{u}) = \propto T(\underline{u})$ তখন যোগাশ্রয়ী রূপান্তর সমচিত্রণ হবে।

(ঞ) স্বভাবী ম্যাট্রিক্স কাকে বলে?

[What is called characteristics matrix?]

উত্তর : A একটি n ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং $\lambda \in F$ হলে λ ও $n - A$ কে A এর স্বভাবী ম্যাট্রিক্স বলে।

(ট) বর্গম্যাট্রিক্সের আইগেন ভেক্টর সংজ্ঞায়িত কর।

[Define eigen vector of a square matrix.]

উত্তর : ধরি F ফিল্ডে A একটি $n \times n$ ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং λ একটি A এর আইগেন মান। যদি একটি অশূণ্য কলাম ভেক্টর $\underline{v} \in F^n$ বিদ্যমান থাকে যেন $A\underline{v} = \lambda v$ হয় তবে $\underline{v}$ কে আইগেন মান λ সাপেক্ষে A এর আইগেন ভেক্টর বলে।

(ঠ) ভেক্টরের যোগাশ্রয়ী সমাবেশ বলতে কী বুঝ?

[What do you mean by linear combination of vectors?]

উত্তর : ধরি, v(F) ভেক্টর জগত যেখানে $\underline{v_1} + \underline{v_2}, \ldots\ldots\ldots v_n \in V$ এবং $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots\ldots \alpha_n \in F$। যদি $\underline{U} = \alpha_1 v_1 + \alpha_1 v_2 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_n v_n \, \underline{u} \in v$ হয় তবে যোগাশ্রয়ী সমাবেশ বলে।

খ-বিভাগ

যেকোনো ৫টি প্রশ্নের উত্তর দাও– **৩ × ৫ = ১৫**

২। $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -6 & 9 & -3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির রেঙ্ক নির্ণয় কর।

[Find the rank of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -6 & 9 & -3 \end{bmatrix}$.]

৩। দেখাও যে, প্রত্যেক জোড় ক্রমের স্কিউ-প্রতিসাম্য নির্ণায়কের মান পূর্ণ বর্গাকার।

[Show that, every skew-symmetric determinant of even order is a perfect square.]

৪। প্রমাণ কর যে, সেট $T = \{(a, b, c, d) \in \nabla^4 : 2a - 3b + 5c - d = 0\}$ একটি ∇^4 উপজগত।

[Prove that, the set $T = \{(a, b, c, d) \in \nabla^4 : 2a - 3b + 5c - d = 0\}$ is a subspace of ∇^4.]

৫। ম্যাট্রিক্স A কে A_1, A_2 এবং A_3 ম্যাট্রিক্সগুলোর যোগাশ্রয়ী সমাবেশরূপে প্রকাশ কর (যদি সম্ভব হয়) ; যেখানে $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ এবং $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$।

[Express (if possible) the matrix A as a linear combination of the matrices A_1, A_2 and A_3 where $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ and $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.]

৬। দেখাও যে, ভেক্টর জগত ∇^3 এর একটি সৃজক $\{(1, 2, 1), (2, 1, 0), (1, -1, 2)\}$.

[Show that, $\{(1, 2, 1), (2, 1, 0), (1, -1, 2)\}$. is a generator of a vector space ∇^3.]

৭। $\{(2, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ সেটটিকে ∇^3 ভেক্টর জগতের একটি ভিত্তিতে বর্ধিত কর।

[Extend the set $\{(2, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ to a basis of ∇^3.]

৮। যদি $T : V(F) \to U(F)$ একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর হয়, তবে দেখাও যে, Ker T একটি V(F) এর উপজগত।

[If $T : V(F) \to U(F)$ be a linear mapping then show that, Ker T is a subspace of V(F).]

৯। A ম্যাট্রিক্সটির মাত্রা ও শূণ্যতা নির্ণয় কর, যেখানে, $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

[Find the rank and nullity for the matrix A, where $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.]

গ-বিভাগ

যেকোনো ৫টি প্রশ্নের উত্তর দাও– **৫ × ৭ = ৩৫**

১০। যদি $u = (i, 1-i, i-3)$ এবং $v = (2, 3+i, -i)$ হয়, তবে $d(u,v)$ u-v এবং $\|v-u\|$ নির্ণয় কর।

[If $u = (i, 1-i, i-3)$ and $v = (2, 3+i, -i)$ then find $d(u,v)$ u-v and $\|v-u\|$.]

১১। K-এর এরূপ মান নির্ণয় কর, যেন নিম্নবর্ণিত একঘাত সমীকরণজোটের

(i) সমাধান নেই; (ii) একাধিক সমান থাকে এবং

(iii) একক সমাধান থাকে : $\left.\begin{aligned} x - 3z &= -3 \\ 2x + ky - z &= -2 \\ x + 2y + kz &= 1 \end{aligned}\right\}$

[Determine the values of K such that the following system of linear equations has (i) no solution, (ii) more than one solution and (iii) a unique solution : $\left.\begin{array}{l} x - 3z = -3 \\ 2x + ky - z = -2 \\ x + 2y + kz = 1 \end{array}\right\}$

১২। ম্যাট্রিক্স পদ্ধতিতে নিম্নলিখিত একঘাত সমীকরণজোটের সমধান কর :
$3x - y + 5z = 1, 2y - 4z = 2, 6x - y + 3z = 0.$
[Solve the following linear equations by matrix method :
$3x - y + 5z = 1, 2y - 4z = 2, 6x - y + 3z = 0.$]

১৩। ইউক্লিডীয় জগতে ত্রিভুজের অসমতা উপপাদ্য বর্ণনা ও প্রমাণ কর ।
[State and prove Tringle inequality theorem in Euclidean's space.]

১৪। দেখাও যে, $T : \nabla^3 \to \nabla^2$ এ বর্ণিত চিত্রণ $T(x, y, z) = (3x + 2y - 4z, x - 5y + 3z)$ যোগাশ্রয়ী এবং উহার কার্ণেল নির্ণয় কর।
[Show that, the mapping $T : \nabla^3 \to \nabla^2$ is defined by $T(x, y, z) = (3x + 2y - 4z, x - 5y + 3z)$ is linear and find its Kernel.]

১৫। যদি ∇^4-এর দুইটি উপজগত $S_1 = \{(x, y, z, t) : y + z + t = 0\}$ ও $S_2 = \{(x, y, z, t) : x + y + \ = 0, z = 2t\}$ হয়, তবে S_1, S_2 ও $S_1 \cap S_2$ এর ভিত্তি ও মাত্রা নির্ণয় কর।
[If $S_1 = \{(x, y, z, t) : y + z + t = 0\}$ and $S_2 = \{(x, y, z, t) : x + y + \ = 0, z = 2t\}$ be subspaces of ∇^4 then find the basis and dimension of S_1, S_2 and $S_1 \cap S_2$.]

১৬। যদি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর $T : \nabla^3 \to \nabla^2$ এ $T(x, y, z) = (2x + y - z; 3x - 2y + 4z)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তবে $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0,0)\}$ এবং $(\{(1, 3), (1, 4)\}$ ভিত্তির প্রেক্ষিতে T-এর ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।
[If the linear transformation $T : \nabla^3 \to \nabla^2$ is defined by $T(x, y, z) = (2x + y - z; 3x - 2y + 4z)$ then find the matrix of T relative to the basis of $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0,0)\}$ and $(\{(1, 3), (1, 4)\}$.]

১৭। $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির সকল আইগেন মান ও সংশ্লিষ্ট আইগেন ভেক্টরসমূহ নির্ণয় কর।
[Find all the eigen values and associated eigen vectors of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$]