জাতীয় বিশ্ববিদ্যালয় পরীক্ষা-২০১৯

বিএসসি অনার্স ১ম বর্ষ ◈ বিষয় : গণিত

কোর্স শিরোনাম : Linear Algebra ◈ কোর্স কোড : ২১৩৭০৫

সময় : ৩ ঘণ্টা   **পূর্ণমান : ৬০**

বিশেষ দ্রষ্টব্য : প্রতিটি বিভাগের প্রশ্নের উত্তর ধারাবাহিকভাবে লিখতে হবে।

ক-বিভাগ

১। যেকোনো ১০টি প্রশ্নের উত্তর দাও–   ১ × ১০ = ১০

(ক) ম্যাট্রিক্সের ট্রেস কী?

উত্তর : একটি বর্গাকার ম্যাট্রিক্স হইলে ইহার মূখ্য কর্ণের পদগুলির যোগফলকে ঐ ম্যাট্রিক্সের ট্রেস বলে। ইহাকে T_r প্রকাশ করা হয়।

(খ) নির্ণায়কের অনুরাশি কাকে বলে?

উত্তর : n ক্রমের নির্ণয়কের যে কোনো পদের অণুরাশি একটি $n - 1$ ক্রমের নির্ণয়কের মান যাহা ঐ পদগামী সারি ও কলাম বাদে পাওয়া যায়।

(গ) জটিল সংখ্যার n পল কাকে বলে?

উত্তর : n সংখ্যক জটিল সংখ্যার অনুক্রম $(z_1, z_2, \ldots\ldots\ldots z_n)$ কে জটিল সংখ্যার n পল বলা হয়।

(ঘ) যোগাশ্রয়ী অপারেটর $T : \nabla^2 \to \nabla^2$ এর ম্যাট্রিক্স রূপায়ণ কী?

উত্তর : ∇^2এর একটি ভিত্তি $\{e_1, e_2\}$ এবং $\left.\begin{array}{l} T(e_1) = a_{11}\, e_1 + a_{12}\, e_2 \\ T(e_2) = a_{21}\, e_1 + a_{22}\, e_2 \end{array}\right\}$ $a_{ij} \in \nabla$ হইলে $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^t$ কে $T : \nabla^2 \to \nabla^2$ যোগাশ্রয়ী অপারেটরের ম্যাট্রিক্স রূপায়ন বলা হয়।

(ঙ) যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল ভেক্টরের সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : মনে করি v(F) ভেক্টর জগত যেখানে $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n \in v$ এবং $\propto_1, \propto_2, \ldots\ldots, \propto_n \in F$. যদি $\propto_1 v_1 + \propto_2 v_2 + \ldots\ldots + \propto_n v_n = 0$ হয় এবং $\{\propto_1, \propto_2, \ldots\ldots \propto_n\}$ সেটের প্রত্যেকটি উপাদান শূন্য হয় তবে ভেক্টরগুলিকে যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল ভেক্টর বলে।

(চ) স্বভাবী সমীকরণ কাকে বলে?

উত্তর : F ফিল্ডে A একটি $n \times n$ ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং $\lambda \in F$ হলে $|\lambda I_n - A| = 0$ কে A এর স্বভাবী সমীকরণ বলে।

(ছ) সংগত রৈখিক সমীকরণ জোট বলতে কী বুঝায়?

উত্তর : যদি $a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, a_2 + \ldots. + a_{in}\, x_n = b_i \ (i = 1, 2, \ldots. , m)$ রৈখিক সমীকরণ জোটকে $0 + 0 + \ldots. + 0 = b \ (b \neq 0)$ আকারে প্রকাশ করা না যায়, তবে উহাকে সংগত সমীকরণ জোট বলা হয়।

(জ) ভেক্টর জগতের সৃজক কাকে বলে?

উত্তর : ভেক্টর জগতের সৃজক : মনে করি, V(F) একটি ভেক্টর জগত এবং $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots\ldots\ldots., \underline{v}_n\}$ তার একটি সসীম উপসেট। যদি $\underline{u} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \ldots\ldots. + \alpha_n \underline{v}_n$, $\forall \underline{u} \in V$ এবং $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots. , \alpha_n \in F$ হয়, তবে S কে V(F) এর সৃজক বলে।

(ঝ) যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের কার্নেল কী?

উত্তর : মনে করি $T : V(F) \to U(F)$ যোগাশ্রয়ী রূপান্তর। এই ক্ষেত্রে v(F) এর যে সকল উপাদানের ইমেজ শূন্য v(F) এর ঐ সকল উপাদানের সেটকে যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের কার্নেল বলে।

(ঞ) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের স্বভাবী ম্যাট্রিক্স কত?

উত্তর : $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের স্বভাবী ম্যাট্রিক্স $\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -4 \\ -2 & \lambda - 5 \end{bmatrix}$, λ একটি স্কেলার।

(ট) লিনিয়ার অপারেটরের আইগেন মান এর সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : মনে করি F ফিল্ডে V ভেক্টর জগত এবং $T : V(F) \to V(F)$ একটি লিনিয়ার অপারেটর। যদি $\lambda \in F$ এবং একটি অশূন্য ভেক্টর $\mathbf{v} \in V$ বিদ্যমান থাকে যেন $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ হয় তবে স্কেলার λ কে T এর আইগেন মান বলে।

(ঠ) দুইটি ম্যাটিক্স কখন গুণনযোগ্য হয়?

উত্তর : যদি দুইটি ম্যাট্রিক্সের প্রথম ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যা সমান হয় তবে তারা গুণযোগ্য হবে।

খ-বিভাগ

যেকোনো ৫টি প্রশ্নের উত্তর দাও–   ৩ × ৫ = ১৫

২। প্রমাণ কর যে, বর্গাকার ম্যাট্রিক্সকে একটি হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স এবং একটি স্কিউ হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্সের যোগফলরূপে প্রকাশ করা যায়।

৩। নিম্নের এক ঘাতবিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধান কর :

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 5 \\ 2x + y - z &= 2 \\ 2x - y - z &= 4 \\ x + 3y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

৪। $\underline{u} = (2 - 5i, 3i, -1 + i)$ এবং $\underline{v} = (4 - i, 8 + 2i, 7 - 3i)$ হলে $\underline{u}.\underline{v}$ এবং $\|\underline{u} - \underline{v}\|$ নির্ণয় কর।

৫। যদি V(F) একটি ভেক্টর জগত হয়, তবে দেখাও যে, $\forall K \in F$ এবং $\underline{O} \in V \Rightarrow K\underline{O} = \underline{O}$.

৬। $s = \{(a, b, c) : 3a + 2b - c = 0, a, b, c \in P\}$ সেটটি P^3 ভেক্টর জগতের উপজগত কিনা পরীক্ষা কর।

৭। v_1, v_2, v_3 ভেক্টরসমূহ যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল হলে দেখাও যে, $v_1 + v_2 - 2v_3, v_1 - v_2 - v_3, v_1 + v_3$ ভেক্টরসমূহও যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল হবে।

৮। মনে কর $T : U(F) \to V(F)$ একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর। তাহলে দেখাও যে, ImT, V(F) এর একটি উপজগত।

৯। P ফিল্ডে $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির আইগেন মান ও সংশ্লিষ্ট আইগেন ভেক্টর নির্ণয় কর।

গ-বিভাগ

যেকোনো ৫টি প্রশ্নের উত্তর দাও— ৫ × ৭ = ৩৫

১০। কসি-সোহার্যের অসমতাটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর।

১১। λ এবং μ এর এরূপ মান নির্ণয় কর যার জন্য নিম্নলিখিত সমীকরণ জোটের (i) সমাধান না থাকে (ii) একাধিক সমাধান থাকে (iii) একক সমাধান থাকে :

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x + 2y + 3z &= 10 \\ x + 2y + \lambda z &= \mu \end{aligned}\right\}$$

১২। যদি P^5 এর দুইটি উপজগত U এবং W যথাক্রমে $\{(1, 3, -3, -1, -4), (1, 4, -1, -2, -2), (2, 9, 0, -5, -2)\}$ এবং $\{(1, 6, 2, -2, 3), (2, 8, -1, -6, -5), (1, 3, -1, -5, -6)\}$ দ্বারা সৃজিত হয়, তবে $(U + W)$ এবং $(U \cap W)$ এর মাত্রা নির্ণয় কর।

১৩। মনে কর V(F) একটি সসীম মাত্রার ভেক্টর জগত এবং $T : V(F) \to U(F)$ একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর। তাহলে দেখাও যে, $\dim(\text{ImT}) + \dim(\text{KerT}) = \dim(V(F))$.

১৪। ল্যাপলাস পদ্ধতি ব্যবহার করে প্রমাণ কর : $\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix} = x^3(a + b + c + d + x)$.

১৫। দেখাও যে, $T : P^3 \to P^2$ যেখানে $T(x, y, z) = (x + y - z, 2x - y + 2z)$ একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর। ImT এবং KerT-এর একটি করে ভিত্তি এবং মাত্রা নির্ণয় কর।

১৬। মনে কর $T : V(F) \to V(F)$ যোগাশ্রয়ী অপারেটর এবং V(F) ভেক্টর জগতের একটি ভিত্তি $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \ldots\ldots \underline{e}_n\}$ তাহলে দেখাও যে, $[T]_e[\underline{V}]_e = [T(\underline{V})]_e \; \forall \underline{v} \in V(F)$.

১৭। $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের জন্য ক্যাইলী-হ্যামিল্টন উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই কর। ইহা হতে A^{-1} নির্ণয় কর।