জাতীয় বিশ্ববিদ্যালয় পরীক্ষা-২০২০

বিএসসি অনার্স ১ম বর্ষ ◈ বিষয় : গণিত

কোর্স শিরোনাম : Linear Algebra ◈ কোর্স কোড : ২১৩৭০৫

সময় : ৩ ঘণ্টা পূর্ণমান : ৬০

বিশেষ দ্রষ্টব্য : প্রতিটি বিভাগের প্রশ্নের উত্তর ধারাবাহিকভাবে লিখতে হবে।

ক-বিভাগ

১। যেকোনো ১০টি প্রশ্নের উত্তর দাও– ১ × ১০ = ১০

(ক) টান্সপোজ ম্যাট্রিক্স-এর সংজ্ঞা দাও।

[Define transpose matrix.]

(খ) ∇^3 এ ভেক্টরের আন্তঃগুণনের সংজ্ঞা দাও।

[Define inner product of vectors in ∇^3.]

(গ) নির্ণায়কের কোনো উপাদানের অনুরাশি ও সহ-গুণক-এর মধ্যে সম্পর্ক কী?

[What is relation between minor and co-factor of any element of a determinant?]

(ঘ) দুটি উপজগৎ এর প্রত্যক্ষ যোগ কাকে বলে?

[What is called direct sum of two-subspaces?]

(ঙ) ∇^n এ ভেক্টর বলতে কী বুঝ?

[What do you mean by vector in ∇^n?]

(চ) $\Re^n$ এ ভেক্টরের নর্ম বা দৈর্ঘ্য এর সংজ্ঞা দাও।

[Define norm or length of vector in $\Re^n$?]

(ছ) মুক্ত চলক-এর সংজ্ঞা দাও।

[Define free variable.]

(জ) ভেক্টর উপ-জগৎ বলতে কী বুঝ?

[What do you mean by vector subspace?]

(ঝ) ভেক্টরের যোগাশ্রয়ী সমাবেশ বলতে কী বুঝ?

[What do you mean by linear combination of vectors?]

(ঞ) {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)} সেটটি কোনো ভিত্তি গঠন করে কি?

[Does the set {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)} form a basis?]

(ট) যোগাশ্রয়ী রুপান্তরের প্রতিবিম্ব এর সংজ্ঞা দাও।

[Define image of a linear combination.]

(ঠ) একটি বর্গ ম্যাট্রিক্সের আইগেন মান ও আইগেন ভেক্টর-এর সংজ্ঞা দাও।

[Define eigen value and eigen vector of a square matrix.]

খ-বিভাগ

যেকোনো ৫টি প্রশ্নের উত্তর দাও– ৩ × ৫ = ১৫

২। যদি A এবং B দুটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

[If A and B are two non-singular matrices, then show that $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.]

৩। যদি $\underline{u}, \underline{v} \in \nabla^n$ হয়, তবে দেখাও যে, $\| \underline{u} + \underline{v} \|^2 + \| \underline{u} - \underline{v} \|^2 = 2 \| \underline{u} \|^2 + 2 \| \underline{v} \|^2$ এবং ইহার জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দাও।

[If $\underline{u}, \underline{v} \in \nabla^n$, then show that, $\| \underline{u} + \underline{v} \|^2 + \| \underline{u} - \underline{v} \|^2 = 2 \| \underline{u} \|^2 + 2 \| \underline{v} \|^2$ and give its geometric interpretation.]

৪। নিম্নের ম্যাট্রিক্সটির ইচালন আকার নির্ণয় কর : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

[Find the echelon form of the following matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.]

৫। যদি ভেক্টর জগৎ v(F) এর দুটি উপ-জগৎ S এবং T হয়, তবে দেখাও যে, $S \cap T$ একটি v(F) এর উপ-জগৎ হবে।

[If S and T are two subspaces of a vector space v(F), then show that $S \cap T$ is a subspace of v(F).]

৬। E ম্যাট্রিক্সকে A, B, C ম্যাট্রিক্সের যোগাশ্রয়ী সমাবেশ আকারে প্রকাশ কর, যেখানে $E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

[Express the matrix E as a linear combination of the matrices A, B, C where $E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.]

৭। দেখাও যে, (1, 1, 2), (1, 0, 1), (2, 1, 3) ভেক্টরত্রয় ∇^3 তে যোগাশ্রয়ী নির্ভরশীল।

[Show that, (1, 1, 2), (1, 0, 1), (2, 1, 3) vectors are linearly dependent in ∇^3.]

৮। আদর্শভিত্তিক সাপেক্ষে $T : \nabla^3$ যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের ম্যাট্রিক্স রূপায়ন কর, যা T (x, y, z) = (2x + y, x – y, z) দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

[Find the matrix representation of the linear transformation $T : \nabla^3 \to \nabla^3$ defined by T (x, y, z) = (2x + y, x – y, z) with respect to the standard basis.]

৯। $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির র‍্যাংক নির্ণয় কর।

[Find the rank of the matrix $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.]

গ-বিভাগ

যেকোনো ৫টি প্রশ্নের উত্তর দাও– **৫ × ৭ = ৩৫**

১০। দেখাও যে, $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1a_2a_3 \dots \dots a_n \left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots \dots \dots + \frac{1}{a_n}\right)$

[Show that $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1a_2a_3 \dots \dots a_n \left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots \dots \dots + \frac{1}{a_n}\right)$.]

১১। k এর এরূপ মান নির্ণয় কর, যা নিম্নলিখিত একঘাতবিশিষ্ট সমীকরণ জোটের (i) সমাধান না থাকে (ii) একাধিক সমাধান থাকে (iii) অনন্য সমাধান থাকে :

$x + y + kz = 2$
$3x + 4y + 2z = k$
$2x + 3y – z = 1.$

[Determine the values of k such that the following system of linear equations have (i) no solution (ii) more than one solution (iii) a unique solution:

$x + y + kz = 2$
$3x + 4y + 2z = k$
$2x + 3y – z = 1.$]

১২। যদি কোনো সসীম মাত্রার ভেক্টর জগৎ v(F) এর u এবং w দুটি উপজগৎ হয়, তবে দেখাও যে, dim (u + w) = dim u + dim w – dim (u ∩ w).

[If u and w are two subspaces of a vector space v(F) of finite order, then prove that dim (u + w) = dim u + dim w – dim (u ∩ w).]

১৩। মনে কর, ∇^4 এর দুটি উপজগৎ v = {(a, b, c, d) : b – 2c + d = 0} এবং w = {(a, b, c, d) : a = d, b = 2c} । (i) v (ii) w (iii) v ∩ w এবং (iv) v + w এর ভিত্তি এবং মাত্রা নির্ণয় কর।

[Let v = {(a, b, c, d) : b – 2c + d = 0} and w = {(a, b, c, d) : a = d, b = 2c} be two subspace of ∇^4. Find a basis and dimension of (i) v (ii) w (iii) v ∩ w and (iv) v + w.]

১৪। (ক) দেখাও যে, {1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0,1)} ভেক্টরে সেটটি ∇^3 এর ভিত্তি।

[Show that the set of vectors {1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0,1)} is a basis of ∇^3.]

(খ) দেখাও যে, ভেক্টর জগত ∇^3 এর {(1, 2, 3), (0, 1, 2), (0, 0,1)} একটি সৃজক।

[Show that, {(1, 2, 3), (0, 1, 2), (0, 0,1)} is a generator of the vector space ∇^3.]

১৫। A ম্যাটিক্সের সারিজগৎ, কলাম গজৎ এবং শূন্যজগতের ভিত্তি নির্ণয় কর। যেখানে–

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

[Find the basis for row space, column space and null space of a matrix A where $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.]

১৬। $A=\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 24 & 8 & -6 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির আইগেন মান ও সংশ্লিষ্ট আইগেন ভেক্টরসমূহ নির্ণয় কর।

[Find the eigen values and the associated eigen vectors of the matrix A = $\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 24 & 8 & -6 \end{pmatrix}$.]

১৭। চেলি-হ্যামিল্টন উপপাদ্য বর্ণনা করুন এবং প্রমাণ করুন।

[State and prove the Cayley-Hamilton Theorem.]