

জাতীয় বিশ্ববিদ্যালয় পরীক্ষা-২০২১

বিএসসি অনার্স ১ম বর্ষ \diamond বিষয় : গণিতকোর্স শিরোনাম : Linear Algebra \diamond কোর্স কোড : ২১৩৭০৫

সময় : ৩ ঘণ্টা

পূর্ণমান : ৬০

বিশেষ দ্রষ্টব্য : প্রতিটি বিভাগের প্রশ্নের উত্তর ধারাবাহিকভাবে লিখতে হবে।

ক-বিভাগ

১। যে-কোনো ১০টি প্রশ্নের উত্তর দাও-

 $১ \times ১০ = ১০$

(ক) অভেদ ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞা দাও।

[Define identity matrix.]

(খ) স্কিউ-প্রতিসাম্য নির্ণায়কের একটি উদাহরণ দাও।

[Give an example of a skew-symmetric determinant.]

(গ) ম্যাট্রিক্সের র্যাংক কী?

[What is rank of a matrix?]

(ঘ) $\underline{u} = (3 - 7i, 2i, -1 + i)$ ও $\underline{v} = (4 + i, 3 - 2i, 8)$ হলে $\underline{u} \cdot \underline{v} =$ কত?[If $\underline{u} = (3 - 7i, 2i, -1 + i)$ ও $\underline{v} = (4 + i, 3 - 2i, 8)$ then find $\underline{u} \cdot \underline{v}$.](ঙ) \mathbb{C}^n -এ দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয়ের সূত্রটি লেখ।[Write down the formula to find the distance between two vectors in \mathbb{C}^n .](চ) ∇^n -এ সমান্তরাল ভেক্টর কাকে বলে?[What is called parallel vectors in ∇^n ?]

(ছ) অসংগত রৈখিক সমীকরণ জোট বলতে কী বুঝায়?

[What is meant by the inconsistent system of linear equations?]

(জ) কখন রৈখিক সমীকরণ জোটের একাধিক সমাধান থাকে?

[When a system of linear equations has more than one solution?]

(ঝ) যোগাশ্রয়ী নির্ভরশীল ভেক্টরের সংজ্ঞা দাও।

[Define linear dependent vectors.]

(ঞ) ভেক্টর জগতের ভিত্তি বলতে কী বুঝ?

[What do you mean by basis of a vector space?]

(ট) যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের নালিটি কাকে বলে?

[What is called nullity of linear Transformation?]

(ঠ) স্বভাবী ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞা দাও।

[Define characteristic matrix.]

খ-বিভাগ

যে-কোনো ৫টি প্রশ্নের উত্তর দাও-

 $৩ \times ৫ = ১৫$

২। প্রমাণ কর যে, বর্গাকার ম্যাট্রিক্সকে একটি হারমিসিয়ান এবং একটি স্কিউ-হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্সের যোগফলরূপে প্রকাশ করা যায়।

[Prove that, every square matrix can be expressed as the sum of a Hermitian matrix and a Skew Hermitian matrix.]

৩। $\underline{u} = (2i, 1 + i, -3 + i)$ এবং $\underline{v} = (4, 3 + i, -i)$ হলে $\|\underline{u} - \underline{v}\|$ নির্ণয় কর।If $\underline{u} = (2i, 1 + i, -3 + i)$ and $\underline{v} = (4, 3 + i, -i)$ then find $\|\underline{u} - \underline{v}\|$.৪। $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

Find the inverse matrix of the matrix-

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$৫। A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 8 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix} \text{ ম্যাট্রিক্সের র্যাংক নির্ণয় কর।}$$

Find the rank of the matrix-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 8 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix}$$

$$৬। A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ম্যাট্রিক্সটির জন্য কেইলি-হ্যামিল্টন উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই কর।}$$

Verify the Caley-Hamilton theorem for the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

৭। দেখাও যে, সেট $S = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{V}^4 : 2a - 3b + 5c - d = 0\}$ একটি \mathbb{V}^4 এর উপজগৎ।

[Show that, the set $S = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{V}^4 : 2a - 3b + 5c - d = 0\}$ is a subspace of \mathbb{V}^4 .]

৮। $\{1, 2, 3\}, (2, 0, -1), (7, 6, -11)\}$ সেটটি যোগাশ্রয়ী নির্ভরশীল অথবা অনির্ভরশীল কি না যাচাই কর।

[Test whether the set $\{1, 2, 3\}, (2, 0, -1), (7, 6, -11)\}$ is linearly dependent or independent.]

৯। $V(F)$ ভেক্টর জগতের $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ একটি ভিত্তি হলে দেখাও যে, $V(F)$ এর প্রত্যেকটি উপাদানকে অনন্যরূপে S এর উপাদানসমূহের সমাবেশরূপে প্রকাশ করা যায়।

[If $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ be a basis of $V(F)$ then show that each of the elements of $V(F)$ can be expressed as a linear combination of the elements of S uniquely.]

গ-বিভাগ

যে-কোনো ৫টি প্রশ্নের উত্তর দাও-

৫ × ৭ = ৩৫

১০। ল্যাপ্লাসের পদ্ধতি ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix} a^2 + \lambda & ab & ac & ad \\ ab & b^2 + \lambda & bc & bd \\ ac & bc & c^2 + \lambda & cd \\ ad & bd & cd & d^2 + \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \lambda).$$

[Using Laplace method prove that,

$$\begin{vmatrix} a^2 + \lambda & ab & ac & ad \\ ab & b^2 + \lambda & bc & bd \\ ac & bc & c^2 + \lambda & cd \\ ad & bd & cd & d^2 + \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3$$

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \lambda).]$$

১১। λ এর এরূপ মান নির্ণয় কর যার জন্য নিম্নলিখিত একঘাতবিশিষ্ট সমীকরণ জোটের (i) সমাধান নেই, (ii) একাধিক সমাধান থাকে, (iii) একক সমাধান থাকে :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + \lambda z = 3 \\ x + \lambda y + 3z = 2 \end{cases}$$

[Determine the values of λ such that the following system of linear equations has (i) no solution, (ii) more than one solution, (iii) a unique solution :]

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + \lambda z = 3 \\ x + \lambda y + 3z = 2 \end{cases}$$

১২। মিনকওয়াস্কি অসমতাটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর।

[State and prove Minkowskiss inequality.]

১৩। (ক) $(3, 9, -4, -2)$ ভেক্টরটিকে $(1, -2, 0, 3), (2, 3, -1, 0)$ এবং $(2, -1, 2, 1)$ ভেক্টরগুলোর যোগাশ্রয়ী সমাবেশরূপে প্রকাশ কর।

[Express the vector $(3, 9, -4, -2)$ is a linear combination of the vectors $(1, -2, 0, 3), (2, 3, -1, 0)$ and $(2, -1, 2, 1)$.]

(খ) v_1, v_2, v_3 ভেক্টরসমূহ যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল হইলে দেখাও যে, $v_1 + v_2 - 2v_3, v_1 - v_2 - v_3, v_1 + v_3$ ভেক্টরসমূহ যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল হইবে।

[If the vectors v_1, v_2, v_3 are linearly independent, then show that vectors $v_1 + v_2 - 2v_3, v_1 - v_2 - v_3, v_1 + v_3$ are also linearly independent.]

১৪। $\{(1, -2, 5, -3), (2, 3, 1, -4), (3, 8, -3, -5)\}$ সেটটিকে বর্ধিত করিয়া \mathbb{V}^4 এর একটি ভিত্তিতে পরিণত কর।

[Extend set $\{(1, -2, 5, -3), (2, 3, 1, -4), (3, 8, -3, -5)\}$ to a basis of \mathbb{V}^4 .]

১৫। যদি \mathbb{V}^5 এর দুটি উপজগৎ U এবং W যথাক্রমে $\{(1, 3, -3, -1, -4), (1, 4, -1, -2, -2), (2, 9, 0, -5, -2)\}$ এবং $\{(1, 6, 2, -2, 3), (2, 8, -1, -6, -5), (1, 3, -1, -5, -6)\}$ দ্বারা সৃজিত হয়, তবে $(U + W)$ এবং $(U \cap W)$ এর মাত্রা নির্ণয় কর।

[If U and W are two subspace of \mathbb{V}^5 where U and W are generated by $\{(1, 3, -3, -1, -4), (1, 4, -1, -2, -2), (2, 9, 0, -5, -2)\}$ and $\{(1, 6, 2, -2, 3), (2, 8, -1, -6, -5), (1, 3, -1, -5, -6)\}$ respectively, then find the dimension of $(U + W)$ and $(U \cap W)$.]

১৬। ধরি, $T : \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3$ একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর : যেখানে $T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$; $\text{Im } T$ এবং $\text{Ker } T$ নির্ণয় কর।

[Let $T : \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3$ be the linear transformation defined by $T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$. Find Im and $\text{Ker } T$.]

১৭। $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির সকল আইগেন মান ও সংশ্লিষ্ট আইগেন ভেক্টরসমূহ নির্ণয় কর।

Find all the eigen values and associated eigen vectors of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$