জাতীয় বিশ্ববিদ্যালয় পরীক্ষা-২০২২

বিএসসি অনার্স ১ম বর্ষ ◈ বিষয় : গণিত

কোর্স শিরোনাম : Linear Algebra ◈ কোর্স কোড : ২১৩৭০৫

সময় : ৩ ঘণ্টা **পূর্ণমান : ৬০**

বিশেষ দ্রষ্টব্য : প্রতিটি বিভাগের প্রশ্নের উত্তর ধারাবাহিকভাবে লিখতে হবে।

ক-বিভাগ

১। যে-কোনো ১০টি প্রশ্নের উত্তর দাও– $১ \times ১০ = ১০$

(ক) লম্ব ম্যাট্রিক্স কাকে বলে?

[What is called orthogonal matrix?]

(খ) নির্ণায়কের কোনো উপাদানের অনুরাশি ও সহগুণকের সম্পর্ক কী?

[What is the relation between minor and cofactor of an element of a determinant?]

(গ) উপ ম্যাট্রিক্স কী?

[What is sub matrix?]

(ঘ) ∇^n এ একক ভেক্টর কাকে বলে?

[What is called unit vector in ∇^n?]

(ঙ) $\underline{u} = (1, -3, 2, 4)$ এর একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

[Find the unit vector of $\underline{u} = (1, -3, 2, 4)$.]

(চ) শূন্য বা গুরুত্বহীন সমাধান কাকে বলে?

[What is called trivial solution?]

(ছ) উপজগত এর সংজ্ঞা দাও।

[Define sub-space.]

(জ) ∇^3 এ তিনটি ভেক্টর লেখ যারা লিনিয়ার অনির্ভরশীল।

[Write three vectors in ∇^3 which are linear independent.]

(ঝ) ভেক্টর জগতের সৃজক বা কারিকা কাকে বলে?

[What is called generator of a vector space?]

(ঞ) যোগাশ্রয়ী অপারেটরের সংজ্ঞা দাও।

[Define linear operator.]

(ট) বর্গ ম্যাট্রিক্সের আইগেন মান এর সংজ্ঞা দাও।

[Define eigen value of a square matrix.]

(ঠ) স্বভাবী বহুপদী কাকে বলে?

[What is called characteristic polynomial?]

খ-বিভাগ

যেকোনো ৫টি প্রশ্নের উত্তর দাও : $৩ \times ৫ = ১৫$

২। Cauchy-Schwartz এর অসমতাটি প্রমাণ কর।

[Prove the Cauchy-Schwartz inequality.]

৩। $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -6 & 9 & -3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির র‍্যাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Find the rank of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -6 & 9 & -3 \end{bmatrix}$.]

৪। যদি $\underline{u} = (1 + i, 2 - i)$ এবং $\underline{v} = (3 - 2i, 4 + i)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, (i) $\underline{u} \cdot \underline{v} = \overline{\underline{v} \cdot \underline{u}}$ (ii) $d(\underline{u}, \underline{v}) = d(\underline{v}, \underline{u})$.

[If $\underline{u} = (1 + i, 2 - i)$ and $\underline{v} = (3 - 2i, 4 + i)$, then prove that, (i) $\underline{u} \cdot \underline{v} = \overline{\underline{v} \cdot \underline{u}}$ (ii) $d(\underline{u}, \underline{v}) = d(\underline{v}, \underline{u})$.]

৫। নিম্নলিখিত সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় কর : $x_1 + 2x_2 = 1, -x_1 + x_2 = 0, 2x_1 + 4x_2 = 3$.

[Solve the system of linear equations : $x_1 + 2x_2 = 1, -x_1 + x_2 = 0, 2x_1 + 4x_2 = 3$.]

৬। যদি ভেক্টর জগত $V(F)$ এর দুটি উপ-জগত S এবং T হয়, তবে দেখাও যে, $S \cup T$ একটি $V(F)$ এর উপজগত হবে।

[If S and T are two subspaces of a vector space V(F), then show that $S \cup T$ is a subspace of V(F).]

৭। দেখাও যে, ভেক্টরসমূহের সেট $\{(1, 1, 0), (1, -1, 0), (1, 1, -2)\}$ একটি ∇^3 এর ভিত্তি।

[Show that the set of vectors $\{(1, 1, 0), (1, -1, 0), (1, 1, -2)\}$ is a basis of ∇^3.]

৮। যদি $T : V(F) \to U(F)$ একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর হয়, তবে দেখাও যে, KerT একটি V(F) এর উপজগত।

[If $T : V(F) \to U(F)$ be a linear mapping then show that, KerT is a subspace of V(F).]

৯। দেখাও যে, রূপান্তর $T : \nabla^3 \to \nabla^2$, $T(x, y, z) = (z, x + y)$ যোগাশ্রয়ী।

[Show that the transformation $T : \nabla^3 \to \nabla^2$, $T(x, y, z) = (z, x + y)$ is linear.]

গ-বিভাগ

যেকোনো ৫টি প্রশ্নের উত্তর দাও : ৫ × ৭ = ৩৫

১০। $\lambda x + y + z = 1, x + \lambda y + z = 1, x + y + \lambda z = 1$ সমীকরণ জোটের জন্য λ এর মান নির্ণয় কর যাতে সমীকরণ জোটের (i) অনন্য সমাধান বিদ্যমান থাকে, (ii) কোনো সমাধান বিদ্যমান না থাকে, (iii) একাধিক সমাধান বিদ্যমান থাকে।

[Find the value of λ for the system of equations $\lambda x + y + z = 1, x + \lambda y + z = 1, x + y + \lambda z = 1$ such that the system of equations has (i) unique solution, (ii) no solution, (iii) more than one solution.]

১১। যদি U এবং W দুইটি কোনো ভেক্টর জগতের সসীম মাত্রাবিশিষ্ট উপজগত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\dim (U + W) = \dim U + \dim W - \dim (U \cup W)$.

[If U and W are two finite dimensional subspaces of any vector space, prove that, $\dim (U + W) = \dim U + \dim W - \dim (U \cup W)$.]

১২। ল্যাপলাস পদ্ধতির সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac & ad \\ ba & b^2+1 & bc & bd \\ ca & cb & c^2+1 & cd \\ da & db & dc & d^2+1 \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1$.

[Using Laplace expansion prove that, $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac & ad \\ ba & b^2+1 & bc & bd \\ ca & cb & c^2+1 & cd \\ da & db & dc & d^2+1 \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1$.]

১৩। $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির জন্য ক্যালী-হ্যামিল্টনের উপপাদ্যটির সত্যতা যাচাই কর।

[Verify Cayley-Hamilton theorem for the matrix $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.]

১৪। $A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{vmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের সকল আইগেন মান ও প্রত্যেক আইগেন মানের জন্য সংশ্লিষ্ট আইগেন জগতের ভিত্তি নির্ণয় কর।

[Find the eigen values and a basis of eigen space corresponding to each eigen values of the matrix $A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{vmatrix}$.]

১৫। মনে কর V(F) একটি সসীম মাত্রার ভেক্টর জগত এবং $T : V(F) \to U(F)$ একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর। তাহলে দেখাও যে, $\dim (ImT) + \dim (KerT) = \dim (V(F))$.

[Let V(F) be a finite dimensional vector space and $T : V(F) \to U(F)$ be a linear mapping. Then show that, $\dim (ImT) + \dim (KerT) = \dim (V(F))$.]

১৬। $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ এবং $\{(1, 3,), (1, 4)\}$ ভিত্তির প্রেক্ষিতে $T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$ দ্বারা বর্ণিত যোগাশ্রয়ী রূপান্তর $T : \nabla^3 (\nabla) \to \nabla^2 (\nabla)$ এর ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

[Find the matrix representing the linear transformation $T : \nabla^3 (\nabla) \to \nabla^2 (\nabla)$ defined by $T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$ with respect to the basis $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ and $\{(1, 3,), (1, 4)\}$ of $\nabla^3 (\nabla) \to \nabla^2 (\nabla)$ respectively.]

১৭। যদি u, v এবং w ভেক্টরসমূহ যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল হয়, তবে দেখাও যে, $u + v - 3w$, $u + 3v - w$ এবং $v + w$ ভেক্টরসমূহ যোগাশ্রয়ী নির্ভরশীল হবে।

[If u, v and w are linearly independent vectors, then show that the vectors $u + v - 3w$, $u + 3v - w$ and $v + w$ are linearly dependent.]