

COURSE CODE : 213711

জাতীয় বিশ্ববিদ্যালয় পরীক্ষা-২০১১

(২০০৯-২০১০ শিক্ষা বর্ষের সিলেবাস অনুযায়ী)

[বিএসসি (অনার্স) প্রথম বর্ষ; পরীক্ষা-২০১১ (অনুষ্ঠিত-২০১২)]

বিষয় কোড : ৬৩৭৪

বিষয় : নন মেজর (ক্যালকুলাস-১)

সময় : ৪ ঘণ্টা

পূর্ণমান-৫০

[দ্রষ্টব্য : একই বিভাগের বিভিন্ন প্রশ্নের উত্তর ধারাবাহিকভাবে লিখতে হবে।]

ক-বিভাগ

১। যে-কোন দশটি প্রশ্নের উত্তর দাও-

১ × ১০ = ১০

(ক) ফাংশনের সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : যদি X ও Y দুটি অশূন্যক সেট এবং f এইরূপ একটি নিয়ম হয় যে, প্রত্যেক $x \in X$ এর জন্য একটি অনন্য $y \in Y$ পাওয়া যায় তবে f কে X সেট হইতে Y সেট একটি ফাংশন বলা হয়। ইহাকে $f: X \rightarrow Y$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(খ) ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ বলতে কী বুঝ?

উত্তর : $f: X \rightarrow Y$ ফাংশনের X কে ডোমেন বলা হয়। ডোমেন D_f দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এবং $f: X \rightarrow Y$ ফাংশনের Y সেটের অন্তর্গত সকল f সম্পর্কিত উপাদান বা ইমেজ দ্বারা গঠিত উপসেটকে ফাংশনের রেঞ্জ বলা হয়। ইহাকে R_f দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(গ) বামসীমা ও ডানসীমা সম্পর্কে বর্ণনা কর।

উত্তর : বামসীমা : যদি একটি চলক x এর মান a এর বামদিক হইতে অগ্রসর হইয়া a এর অতি নিকটবর্তী হওয়ায় $f(x)$ এর একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l এর অতি নিকটবর্তী হয়

তবে l কে $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের বামসীমা বলে। ইহাকে $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

ডানসীমা : যদি একটি চলক x এর মান a এর ডানদিক হইতে অগ্রসর হইয়া a এর অতি নিকটবর্তী হওয়ায় $f(x)$ এর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l এর অতি নিকটবর্তী হয়

তবে l কে $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের ডানসীমা বলে। ইহাকে $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(ঘ) লিবনীজ-এর উপপাদ্যের বর্ণনা দাও।

উত্তর : যদি $u = u(x)$ এবং $v = v(x)$ উভয়ই x এর সাপেক্ষে n সংখ্যক পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণযোগ্য হয় তবে $(uv)_n = u_n v + {}^n C_1 u_{n-1} v_1 + {}^n C_2 u_{n-2} v_2 + \dots + u v_n$ যেখানে u ও v এর সূচক সমূহ x এর সাপেক্ষে উহাদের অন্তরীকরণ শর্ত নির্দেশ করে।

(ঙ) ক্রমহ্রাসমান ফাংশন ও ক্রমবর্ধমান ফাংশন সম্পর্কে বর্ণনা দাও।

উত্তর : ক্রমহ্রাসমান ফাংশন : যদি x এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে $f(x)$ এর মান হ্রাস পায় তবে $f(x)$ কে ক্রমহ্রাসমান ফাংশন বলা হয়।

ক্রমবর্ধমান ফাংশন : যদি x এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে $f(x)$ এর মানও বৃদ্ধি পায় তবে $f(x)$ কে ক্রমহ্রাসমান ফাংশন বলা হয়।

(চ) রোল-এর উপপাদ্য বর্ণনা কর।

উত্তর : যদি $y = f(x)$ ফাংশন $[a, b]$ বন্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন, (a, b) খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য এবং $f(a) = f(b)$ হয় তবে অন্ত:ত একটি সংখ্যা $c \in (a, b)$ পাওয়া যাইবে যেখানে $f'(c) = 0$ ।

(ছ) এল-হসপিটাল নিয়মের সর্বজনীন আকার লিখ।

উত্তর : যদি $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ এবং $\frac{f(a)}{g'(a)}$ বিদ্যমান থাকে তবে $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(a)}{g'(a)}$

(জ) বিটা ও গামা ফাংশনের সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : $n > 0$ হইলে $\int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx$ কে গামা ফাংশন বলে হইকে $\Gamma(n)$ দ্বারা প্রকাশ

করা হয়। $\therefore \Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx$ এবং $m, n > 0$ হইলে $\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$ কে বিটা ফাংশন বলে। ইহা $\beta(m, n)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$$\therefore \beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx.$$

(বা) সমাকলনের মৌলিক উপপাদ্যটি লিখ।

উত্তর : যদি $f(x)$ ফাংশন $[a, b]$ বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং $f(x)$ এর প্রতিঅন্তরক

$$F(x) \text{ হয় তবে } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

(এ) অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল বলতে কী বুঝ?

উত্তর : এক নির্দিষ্ট ইন্টিগ্রাল $\int_a^b f(x) dx$ কে অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল বলা হইবে যদি

ইন্টিগ্রালের লিমিট a এবং b এর কম্পনে একটি অসীম হয় অথবা যদি $a \leq x \leq b$ ব্যবধির এক বা একাধিক বিন্দুতে ইন্টিগ্রাল $f(x)$ বিচ্ছিন্ন বা অসীমায়িত হয়।

(ট) পোলার রেখার $r = f(\theta)$ এর চাপ দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

উত্তর : $\theta = \alpha, \theta = \beta$ এর মধ্যে $r = f(\theta)$ বক্ররেখার চাপ দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের

$$\text{ইন্টিগ্রাল সূত্র } \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

(ঠ) $f(x) = 0$ বক্ররেখার $p(x, y)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ লিখ।

উত্তর : স্পর্শকের সমীকরণ : $y - y_1 = \frac{dy}{dx} (x - x_1)$ এবং অভিলম্বের সমীকরণ : $x - x_1 + (y - y_1) f'(x_1) = 0$

খ-বিভাগ

যে-কোন পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও-

৪ × ৫ = ২০

২। $f(x) = |x| + |x-1|$ ফাংশনের লেখচিত্র আঁক। এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

৩। মূল নিয়মে $e \tan^{-1} x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

৪। (ক) x -এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর : $\sin \left(2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)$

$$(খ) \frac{e^{x^2} \tan^{-1} x}{\sqrt{1+x^2}}$$

৫। $f(x) = x^3 - 3x + 2$ ফাংশনের জন্য $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$ ব্যবধির মধ্যে লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠ মান নির্ণয় কর।

৬। সমাকলন কর : $\int (x-1) \sqrt{x^2-1} dx$

৭। (ক) মান নির্ণয় কর : $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{5+3\cos\theta}$

$$(খ) \int_0^{\infty} \frac{\ln(x + \frac{1}{x})}{1+x^2} dx.$$

৮। (ক) মান নির্ণয় কর : $\lim_{h \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{h} + \frac{1}{\sqrt{h^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{h^2-2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{h^2-(h-1)^2}} \right]$

(খ) মান নির্ণয় কর : $\lim_{h \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{h} + \frac{h^2}{(h+1)^3} + \frac{h^2}{(h+1)^3} + \dots + \frac{1}{8h} \right]$

$$(গ) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{2n} \frac{1}{\sqrt{4n^2+r^2}}$$

৯। $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ এস্টেরয়েড দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রকে x অক্ষের চতুর্দিকে ঘুরালে উৎপন্ন তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ-বিভাগ

যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও-

8x10=80

$$১০। \text{ দেওয়া আছে, } f(x) = \begin{cases} x^2; & \text{যখন } x \leq 0 \\ x; & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x}; & \text{যখন } x \geq 1 \end{cases}$$

ফাংশনের লেখচিত্র আঁক। ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। $x = 1$ বিন্দুতে ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা কর।

১১। লিবনীজের উপপাদ্যটি বর্ণনাসহ ও প্রমাণ কর। যদি $y = \cos \{\ln(1+x)\}$ হয় তবে, দেখাও যে, $(1+x^2)y_{n+2} + (2n+1)(1+x)y_{n+1} + (x^2+1)y_n = 0$.

১২। যদি $I_{m,n} = \int \cos^m x \sin nx \, dx$, তবে দেখাও যে, $I_{m,n} = \frac{\cos^m x \cos nx}{m+x} + \frac{m}{m+n}$

$$I_{m-1, n-1} \text{ এবং ইহা হতে আরো দেখাও যে, } \int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 3x \, dx = \frac{1}{3}.$$

১৩। প্রমাণ কর যে, $\beta(m, n) = \beta(n, m)$ আরো দেখাও যে, $\sqrt{(n+1)} = n!$