

জাতীয় বিশ্ববিদ্যালয় পরীক্ষা-২০১২

(২০০৯-২০১০ শিক্ষা বর্ষের সিলেবাস অনুযায়ী)

বিষয় কোড : ৬৩৭৪

বিষয় : নন মেজর (ক্যালকুলাস-১)

সময় : ৪ ঘণ্টা

পূর্ণমান-৫০

দ্রষ্টব্য : একই বিভাগের বিভিন্ন প্রশ্নের উত্তর ধারাবাহিকভাবে লিখতে হবে।

ক-বিভাগ

১। যে-কোন দশটি প্রশ্নের উত্তর দাও-

১ × ১০ = ১০

(ক) $y = \cos x$ -এর রেঞ্জ কত হবে?উত্তর : $y = \cos x$ -এর রেঞ্জ = $[-1, 1]$ (খ) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ এর ডোমেন লিখ।

উত্তর : $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ এর ডোমেন = $\{x : x^2 - 1 \geq 0\}$
 $= \{x : x \leq -1 \text{ বা } x \geq 1\}$
 $= (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

(গ) কোনো ফাংশনের $x = a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা হওয়ার শর্ত লিখ।

উত্তর : যদি $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ও $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ সসীম বা বিদ্যমান হয় এবং $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ হয় তবে $f(x)$ ফাংশন $x = a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হইবে।

(ঘ) লিমিট-এর সাহায্যে অন্তরজ নির্ণয়ের সূত্রটি লিখ।

উত্তর : ধরি, $f(x)$ ফাংশনটি $x = a$ বিন্দুতে সঞ্জায়িত। তাহা হইলে $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0}$

$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \dots (1)$ কে $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরজ বলা হইবে যদি (1) এর

লিমিট বিদ্যমান থাকে।

(ঙ) $\sin^2 x$ কে $\sin x$ -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ কর।

উত্তর : $\frac{d}{dx} (\sin^2 x) = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x} = 2 \sin x$

(চ) ফাংশনের পরম গরিষ্ঠ মান বলতে কী বুঝ?

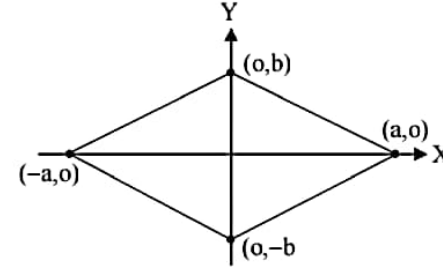
উত্তর : যদি $f(x)$ ফাংশনের ডোমেন D_f এ c এইরূপ একটি বিন্দু হয় যে, $f(x) \leq f(c)$,
 $\forall x \in D_f$ তবে $f(c)$ কে ফাংশনটির পরম গরিষ্ঠমান বলে।

(ছ) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ এর মান লিখ।

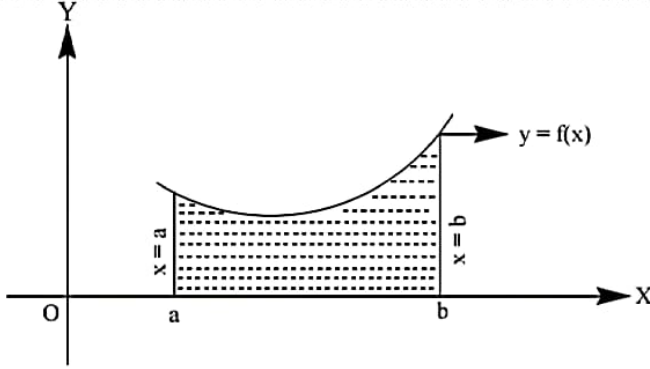
উত্তর : $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \left(\frac{x}{a}\right) + c$

(জ) $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}$ দ্বারা কি নির্দেশিত হয়? এর চিত্রটি অঙ্কন কর।

উত্তর : $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$ দ্বারা হাইপো সাইক্লয়েড নির্দেশিত হয় ইহার চিত্রটি নিম্নে আঁকা হইল :

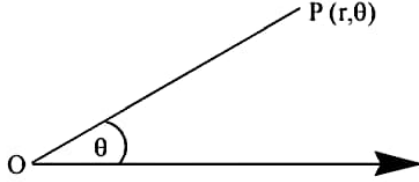
(ঝ) $\int_a^b f(x) dx$ দ্বারা কী নির্দেশ করে?

উত্তর : $\int_a^b f(x) dx$ দ্বারা $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ এবং x অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল নির্দেশ করে। চিত্রে ইহা ছায়ায়িত করা হইল।



(এ৩) পোলার স্থানাঙ্ক পদ্ধতি বলতে কী বুঝ?

উত্তর : পোলার স্থানাঙ্ক পদ্ধতি একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O এবং ঐ বিন্দু হইতে উৎসারিত রশ্মি দ্বারা গঠিত। এই পদ্ধতিতে p বিন্দুর স্থানাঙ্ক (r, θ) দ্বারা বোঝায়, p বিন্দু হইতে মূলবিন্দুর দূরত্ব r এবং পোলার অক্ষ ও op এর মর্ধবর্তী কোণ θ



(ট) বিটা ও গামা ফাংশনের মধ্যকার সম্পর্কটি লিখ।

উত্তর : বিটা ও গামা ফাংশনের মধ্যে সম্পর্ক $\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$.

(ঠ) কোনো ফাংশনের সন্ধি বিন্দু বলতে কী বুঝ?

উত্তর : পরপর ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান অংশদ্বয়ের মিলন বিন্দুকে সন্ধি বা চরম বিন্দু বলে। যদি $x = a$ সন্ধি বিন্দু বা চরম বিন্দু হয় তবে $f'(a) = 0$ হইবে।

খ-বিভাগ

যে-কোন পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও-

৪ × ৫ = ২০

২। $(\delta - \epsilon)$ সংজ্ঞার সাহায্যে প্রমাণ কর $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$.

৩। যদি $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

৪। x-এর সম্পর্কে অন্তরজ নির্ণয় কর (যে কোন দুটি) :

(ক) $(\sin x)^{\sin x}$; (খ) $\ln \left\{ e^x \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{3/2} \right\}$; (গ) $x \tan x$.

৫। যদি $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে-

$$(x^2 - 1) y_{n+2} + (2n + 1) x y_{n+1} + (n^2 - m^2) y_n = 0$$

৬। কোন কোন ব্যবধিতে $f(x) = 5 + 12x - x^3$ ফাংশনটি বৃদ্ধি ও হ্রাস পায় আলোচনা কর।

৭। সমাকলন কর (যে কোন দুটি) :

(ক) $\int \tan^3 x \sqrt{\sec x} dx$;

(খ) $\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x-2}}$

(গ) $\int \frac{x dx}{(x-1)(x^2-1)}$

৮। মান নির্ণয় কর (যে কোন দুটি) :

(ক) $\int_0^1 \frac{x^3 \sin^{-1} x}{(2 + \cos x)^2} dx$

(খ) $\int_0^\pi \frac{dx}{(2 + \cos x)^2}$;

(গ) $\int_0^\pi x \cos^4 x dx$.

৯। $3ay^2 = x(x - a)^2$ বক্ররেখার একটি ফাঁসের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

গ-বিভাগ

যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও-

$$১০ \times ২ = ২০$$

১০। Mean value উপপাদ্যটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর।

১১। ক্যালকুলাসের মৌলিক উপপাদ্যটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর।

১২। $y^2 = x(2a - x)$ এবং $y^2 = ax$ বক্ররেখার দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১৩। $\int \tan^n x \, dx$ -এর লঘুকরণ সূত্রটি নির্ণয় কর। $\int \tan^7 x \, dx$ -এর মান নির্ণয় কর।