

জাতীয় বিশ্ববিদ্যালয় পরীক্ষা-২০১৩

বিষয় : নন মেজর (ক্যালকুলাস-১)

বিষয় কোড : ৬৩৭৪

সময় : ২.৫০ ঘণ্টা

পূর্ণমান : ৪০

[দ্রষ্টব্য : প্রত্যেক বিভাগের প্রশ্নের উত্তর ধারাবাহিকভাবে লিখতে হবে।]

ক-বিভাগ

১। যে কোনো ৮ টি প্রশ্নের উত্তর দাও-

১ × ৮ = ৮

(ক) $f(x) = \ln x$ ফাংশনের ডোমেন কতো?[What is the domain of the function $f(x) = \ln x$?]উত্তর : এখানে $x > 0$ এর জন্য কেবল মাত্র y এর বাস্তব মান বিদ্যমান $\therefore Df = \{x : x > 0\} = (0, \infty)$ ।(খ) x এর সাপেক্ষে $y = e^{3x}$ এর n তম অন্তরজ কতো?[What is the n -th derivative of $y = e^{3x}$ with respect to x .]উত্তর : x এর সাপেক্ষে $y = e^{3x}$ এর n তম অন্তরজ হইলো $y_n = 3^n e^{3x}$ ।(গ) অনির্ণেয় $\frac{0}{0}$ আকার বলতে কী বুঝ?[What do you mean by indeterminate $\frac{0}{0}$ form?]উত্তর : যদি $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ এবং $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ হয় তবে $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ কে অনির্ণেয় $\frac{0}{0}$ আকার বলে।

(ঘ) প্রতি অন্তরজ কী?

[What is antiderivatives?]

উত্তর : একটি ফাংশন $F(x)$ কে কোন প্রদত্ত ব্যবধিতে বর্ণিত ফাংশন $f(x)$ এর প্রতিঅন্তরজ বলা হইবে যদি ঐ ব্যবধির সকল x এর জন্য $\frac{d}{dx} \{F(x)\} = f(x)$ হয়।(ঙ) $r = a \sin 4\theta$ বক্ররেখার কতটি ফাঁস আছে?[How many loops are in $r = a \sin 4\theta$?]উত্তর : $r = a \sin 4\theta$ এর আটটি ফাঁস আছে।

(চ) ওয়েলী এর সূত্র বর্ণনা কর।

[State Walli's formula.]

$$\text{উত্তর : } \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$$

$$= \begin{cases} \frac{(n-1)(n-3)\dots\dots 5.3.1}{n(n-2)\dots\dots 6.4.2} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ যখন } n \text{ জোড়} \\ \frac{(n-1)(n-3)\dots\dots 6.4.2}{n(n-2)\dots\dots 5.3.1} \text{ যখন } n \text{ বেজোড়} \end{cases}$$

(ছ) ফাংশন $f(x) = |x-2| + 3$ এর রেঞ্জ কতো?[What is the range of $f(x) = |x-2| + 3$?উত্তর : $f(x) = |x-2| + 3$

$$= \begin{cases} -(x-2) + 3 \text{ যখন } x < 2 \\ x-2 + 3 \text{ যখন } x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 5-x \text{ যখন } x < 2 \\ x+1 \text{ যখন } x \geq 2 \end{cases}$$

ফাংশনটির রেঞ্জ $(Rf) = (3, \infty) \cup (3, \infty) = (3, \infty)$ (জ) কোন শর্তে $y = f(x)$ ফাংশনটি $x = a$ বিন্দুতে ক্রমবর্ধমান হবে?[Under which condition the function $y = f(x)$ will be increasing at $x = a$?]উত্তর : যদি $f'(a) > 0$ হয় তবে $x = a$ বিন্দুতে $y = f(x)$ ফাংশনটি ক্রমবর্ধমান হইবে।

(ঝ) ক্যালকুলাসে মৌলিক উপপাদ্যটি কী?

[State fundamental theorem of calculus.]

উত্তর : যদি $f(x)$ ফাংশন $[a, b]$ বন্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং $f(x)$ এর প্রতি অন্তরক

$$F(x) \text{ হয় তবে } \int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

(ঞ) অয়লারের প্রথম যোগজটি লিখ।

[Write down the Euler's First integral.]

উত্তর : $m, n > 0$ হইলে $\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} \, dx$ কে বিটা ফাংশন বলে। ইহাকে $\beta(m, n)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$$\therefore \beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

খ-বিভাগ

যে কোনো ৩ টি প্রশ্নের উত্তর দাও-

৪ × ৩ = ১২

২। $x = \sin\left(\frac{1}{m} \ln y\right)$ হলে, দেখাও যে, $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2+m^2)y_n = 0$

[If $x = \sin\left(\frac{1}{m} \ln y\right)$, then show that, $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2+m^2)y_n = 0$.]

৩। মান নির্ণয় কর (যেকোনো দুইটি) :

(ক) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x} dx}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}$

(খ) $\int_0^{\pi} \frac{x \tan x dx}{\sec x + \cos x}$

(গ) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x) dx}{1+x^2}$

৪। $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তকে x অক্ষের চতুর্দিকে ঘুরালে যে ঘনবস্ত্র উৎপন্ন হয়, উহার আয়তন নির্ণয় কর।

[Find the volume of the solid formed by the revolution of the ellipse

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ about s-axis.]

৫। $y = \cos(ax + b)$ হলে, দেখাও যে, $y_n = a^n \cos\left(ax + b + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ ।

[If $y = \cos(ax + b)$, then show that $y_n = a^n \cos\left(ax + b + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$.]

৬। দেখাও যে, পরাবৃত্ত $x^2 = 4ay$ এবং $y^2 = 4ax$ দ্বারা ছেদকৃত অংশের ক্ষেত্রফল $\frac{16a^2}{3}$ ।

[Show that the common area intersected by parabola $x^2 = 4ay$ and $y^2 = 4ax$ is $\frac{16a^2}{3}$.]

গ-বিভাগ

যে কোনো ২ টি প্রশ্নের উত্তর দাও-

১০ × ২ = ২০

৭। দেওয়া আছে,

$$f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{যখন } x < 0 \\ x & \text{যখন } 0 \leq x \leq 1 \\ 1/x & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$$

ফাংশনটির লেখচিত্র আঁক। ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। $x = 1$ বিন্দুতে ফাংশনটির অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা কর।

$$[\text{Given } f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{when } x < 0 \\ x & \text{when } 0 \leq x \leq 1 \\ 1/x & \text{when } x > 1 \end{cases}]$$

Draw the graph of the function. Find domain and range of it. Also justify the continuity and differentiability of the function at the point $x = 1$.

৮। বিটা ফাংশন ও গামা ফাংশনের মধ্যকার সম্পর্কটি স্থাপন কর এবং দেখাও যে, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

$$= \sqrt{\pi}$$

[Establish the relation between Beta and Gamma functions. Also show that, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.]

৯। রোলের উপপাদ্যটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর।
[State and prove Rolle's theorem.]

১০। প্রমাণ কর যে, বৃত্ত $r = a\sqrt{2}$ এবং $r = 2a \cos \theta$ দ্বারা কর্তিত অংশের ক্ষেত্রফল $a^2(\pi - 1)$.
[Prove that the area common to the circles $r = a\sqrt{2}$ and $r = 2a \cos \theta$ is $a^2(\pi - 1)$.]