

জাতীয় বিশ্ববিদ্যালয় পরীক্ষা-২০১৫

বিষয় : নন মেজর (ক্যালকুলাস-১)

বিষয় কোড : ২১৩৭১১

সময় : ২.৩০ ঘণ্টা

পূর্ণমান : ৪০

দ্রষ্টব্য : প্রত্যেক বিভাগের প্রশ্নের উত্তর ধারাবাহিকভাবে লিখতে হবে।

ক-বিভাগ

১। যে কোনো ৮ টি প্রশ্নের উত্তর দাও-

১ × ৮ = ৮

(ক) $f(x) = \frac{1}{x}$ ফাংশনের রেঞ্জ কত?[What is the range of the function $f(x) = \frac{1}{x}$?]উত্তর : $f(x) = \frac{1}{x}$ ফাংশনের ডোমেন $R - \{0\}$ এর প্রত্যেক মানবা বিন্দুর সাপেক্ষে $y \in R - \{0\}$ হইবে।∴ রেঞ্জ $R_f = R - \{0\}$ ।

(খ) ফাংশনের বাম সীমা কী?

[What is left limit of a function?]

উত্তর : যদি একটি চলক x এর মান a এর বামদিক হইতে অগ্রসর হইয়া a এর অতি নিকটবর্তী হওয়ায় $f(x)$ এর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l এর অতি নিকটবর্তী হয়, তবে l কে $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর বাম সীমা বলে। ইহাকে $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।(গ) কোন ব্যবধিতে $y = \sin x$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন?[Which is the interval where the function $y = \sin x$ is continuous?]উত্তর : $y = \sin x$ ফাংশনটি $(-\infty, \infty)$ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন।(ঘ) $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য হওয়ার শর্তসমূহ নিম্নে দেওয়া হইল।[Write the conditions for differentiability of $f(x)$ at $x = a$.]উত্তর : (i) $Lf(a)$ বিদ্যমান এবং সমীম হইবে।(ii) $Rf(a)$ বিদ্যমান এবং সমীম হইবে।(iii) $Lf(a) = Rf(a)$ হইবে।(ঙ) কোন শর্তে (x, y) বিন্দুতে $y = f(x)$ এর স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল বা y অক্ষের উপর লম্ব হবে?[Which is the condition where the tangent line of $y = f(x)$ at (x, y) is parallel to x -axis or perpendicular to y -axis?]উত্তর : $\frac{dy}{dx} = 0$ হইলে (x, y) বিন্দুতে $y = f(x)$ রেখার স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল বা y অক্ষের লম্ব হইবে।(চ) অনির্ণেয় $\frac{\infty}{\infty}$ আকার বলতে কী বুঝ?[What do you mean by indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$ form?]উত্তর : যদি $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$ এবং $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm \infty$ হয় তবে $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ কেঅনির্ণেয় $\frac{\infty}{\infty}$ আকার বলে।(ছ) $\int a^x dx$ এর সূত্র লিখ।[Write the formula of $\int a^x dx$.]উত্তর : $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$.

(জ) ওয়েল্লীর সূত্রটি লিখ।

[Write the Wall's formula.]

উত্তর : যদি n যোগবোধক পূর্ণসংখ্যা হয় তবে $\int_0^{n/2} \sin^n x dx = \int_0^{n/2} \cos^n x dx$

$$= \begin{cases} \frac{(x-1)(x-3) \dots 5.3.1}{n(n-2) \dots 6.4.2} \pi/2 \text{ যখন } n \text{ জোড়} \\ \frac{(n-1)(n-2) \dots 6.4.2}{n(n-2) \dots 5.3.1} \text{ যখন } n \text{ বেজোড়।} \end{cases}$$

(ঝ) গামা ফাংশনের আবর্ত সূত্রটি লিখ।

[Write the recurrence formula of Gamma function.]

উত্তর : গামা ফাংশন আবর্ত সূত্রটি হইল $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

(এ) $y = f(x)$ বক্ররেখার $[a, b]$ ব্যবধিতে চাপদৈর্ঘ্য নির্ণয়ের সমাকলন সূত্র লিখ।

[Write the integral formula to find arc length of the curve $y = f(x)$ in the interval (a, b)]

উত্তর : $y = f(x)$ বক্ররেখার $[a, b]$ ব্যবধিতে নির্ণয়ের সমাকলন সূত্র :

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

খ-বিভাগ

যে কোনো ৩ টি প্রশ্নের উত্তর দাও-

৪ × ৩ = ১২

২। $f(x) = 3 + 2x$ যখন $-\frac{3}{2} \leq x < 0$

$= 3 - 2x$ যখন $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$

$= -3 - 2x$ যখন $x \geq \frac{3}{2}$

ফাংশনটির $x = 0$ এবং $x = \frac{3}{2}$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা যাচাই কর।

৩। যদি $y = \sin nx + \cos nx$ হয় তবে দেখাও যে, $y_r = n^r [1 + (-1)^r \sin 2nx]^{1/2}$.

৪। যদি $y = \sin(m \sin^{-1} x)$ হয় তবে দেখাও যে, $(1 - x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} + (m^2 - n^2)y_n = 0$.

৫। মান নির্ণয় কর (যেকোনো দুইটি) :

(ক) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5 + 3 \cos x}$

(খ) $\int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 3x^3} dx$

(গ) $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}}$

৬। $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ এস্টেরয়েড দ্বারা আবদ্ধক্ষেত্রকে x অক্ষের চতুর্দিকে ঘুরালে উৎপন্ন তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ-বিভাগ

যে কোনো ৫ টি প্রশ্নের উত্তর দাও-

৭ × ৫ = ৩৫

৭। যদি $f(x) = |x-1| + |x-3|$ হয় তবে $x = -3$ ও $x = 1$ বিন্দুতে ফাংশনটির অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা কর।

৮। বিটা ফাংশন ও গামা ফাংশনের মধ্যকার সম্পর্কটি স্থাপন কর এবং দেখাও যে,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^p \theta \cos^q \theta d\theta = \frac{\sqrt{\left(\frac{p+1}{2}\right)} \sqrt{\left(\frac{q+1}{2}\right)}}{2\sqrt{\left(\frac{p+q+2}{2}\right)}}$$

৯। ল্যাথ্রাজ আকারের অবশেষসহ টেলর উপপাদ্যটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর।

১০। $27ay^2 = 4(x-2a)^3$ এবং $y^2 = 4ax$ বক্ররেখা দ্বারা সীমাবদ্ধক্ষেত্র দ্বারা আবর্তিত ঘনকের ঘনমান নির্ণয় কর।