

জাতীয় বিশ্ববিদ্যালয় পরীক্ষা-২০১৬

বিষয় : নন মেজর (ক্যালকুলাস-১)

[২০১৩-২০১৪ সালের সিলেবাস অনুযায়ী]

বিষয় কোড : ২১৩৭১১

সময় : ২ ঘণ্টা ৩০ মিনিট

পূর্ণমান : ৪০

দ্রষ্টব্য : প্রত্যেক বিভাগের প্রশ্নের উত্তর ধারাবাহিকভাবে লিখতে হবে।

ক-বিভাগ

১। নিচের যে কোনো ৮টি প্রশ্নের উত্তর দাও :

১ × ৮ = ৮

(ক) $y = \sqrt{1-x^2}$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned} \text{উত্তর : } f(x) &= \sqrt{x^2-1} \text{ এর ডোমেন} = \{x : x^2-1 \geq 0\} \\ &= \{x : x \leq -1 \text{ বা } x \geq 1\} \\ &= (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \end{aligned}$$

(খ) সার্বিক ফাংশন কী?

উত্তর : $f : A \rightarrow B$ ফাংশনটিকে সার্বিক ফাংশন বলা হবে যদি $f(A) = B$ হয় অর্থাৎ রেঞ্জ ও কোডোমেন সমান হয়।

(গ) $f(x) = |x|$ দ্বারা কী বুঝায়?

উত্তর : $f(x) = |x|$ দ্বারা বুঝায় ফাংশনটির $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনের মান ও সীমাহ্রমান বিদ্যমান। অর্থাৎ $f(0) = 0$ এবং $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ (বিদ্যমান)।

(ঘ) $y = f(x)$ ফাংশনের জন্য $\frac{dy}{dx}$ এর মূল আকার লিখ।

উত্তর : দেওয়া আছে,

$$y = f(x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\left| \begin{aligned} \Delta y &= (y + \Delta y) - y \\ &= f(x + \Delta x) - f(x) \end{aligned} \right.$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(ঙ) $\sin^2 x$ কে $\sin x$ এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ কর।

$$\text{উত্তর : } \frac{\frac{d}{dx}(\sin^2 x)}{\frac{d}{dx}(\sin x)} = \frac{2\sin x \cos x}{\cos x} = 2\sin x.$$

(চ) x -এর সাপেক্ষে $y = e^{2x}$ এর n -তম অন্তরজ কত?উত্তর : x -এর সাপেক্ষে $y = e^{2x}$ এর n -তম অন্তরজ হলো : $y_n = 2^n e^{2x}$.(ছ) $x = a$ বিন্দুতে একটি ফাংশন $f(x)$ এর গরিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান থাকার প্রয়োজনীয় শর্তটি লিখ।

উত্তর : $x = a$ বিন্দুতে একটি ফাংশন $f(x)$ এর গরিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান থাকার প্রয়োজনীয় শর্ত হলো, $x = a$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 0$.

(জ) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx$ কত?

$$\text{উত্তর : } \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c$$

(ঝ) $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ কী শর্তে হবে?উত্তর : যদি $f(x) = f(2a-x)$ হয় তবে $\int_0^{2a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ হবে।(ঞ) যদি $[a, b]$, ব্যবধিতে $f(x)$ একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন হয় তবে $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ এবং x অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সমাকলন সূত্রটি লিখ।উত্তর : প্রদত্ত শর্তে সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সমাকলন সূত্র : $\int_a^b f(x) dx$.

খ-বিভাগ

যে কোনো ৩ টি প্রশ্নের উত্তর দাও-

৪ × ৩ = ১২

২। সীমার $(\delta - \varepsilon)$ সংজ্ঞার সাহায্যে দেখাও যে, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$.৩। x এর সাপেক্ষে $x^y + y^x = a^b$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।৪। $\sin x$ কে $(x - \frac{\pi}{2})$ ক্রম শক্তি ধারায় ল্যাগরঞ্জের অবশেষসহ টেলর সসীম ধারায় বিস্তৃত কর।

৫। মান নির্ণয় কর :

(ক) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$;

(খ) $\int_0^a \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$.

৬। x অক্ষরেখা এবং $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$ সাইক্লোয়েডের দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ-বিভাগ

যে কোনো ২ টি প্রশ্নের উত্তর দাও-

১০ × ২ = ২০

৭। (ক) দেখাও যে, $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x$ ফাংশনটির মান $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে বৃহত্তম এবং $x = 1$ বিন্দুতে ক্ষুদ্রতম।

উত্তর সংকেত : অধ্যায়-৪ (C)-এর সমস্যা-৩৭।

(খ) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{যখন } x < 0 \\ 1 + \sin x & \text{যখন } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 2 + (x - \frac{\pi}{2})^2 & \text{যখন } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ হলে $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের

অবিচ্ছিন্নতা এবং অন্তরীকরণ যোগ্যতা যাচাই কর।

৮। লিবনিৎসের উপপাদ্য বর্ণনা কর এবং একে প্রয়োগ করে প্রমাণ কর যে,

$$(x^2 + 1)y_{n+2} + (2n + 1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0, \text{ যেখানে } y = [x + \sqrt{1+x^2}]^m$$

৯। ইন্টিগ্র্যাল ক্যালকুলাসের মৌলিক উপপাদ্য বর্ণনা ও প্রমাণ কর এবং দেখাও যে,

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

১০। $3ay^2 = x(x - a)^2$ বক্ররেখার একটি ফাঁসের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।