NUMSc-2012

১। (ক) একটি আবদ্ধ ক্ষেত্রে $y'(x)=f(x,y), y(x_0)=y_0$ আদিমান সমস্যার জন্য সমাধানের অস্তিত্ব ও অনন্যতা উপপাদ্যের বর্ণনা দাও এবং অনন্যতা উপপাদ্যের প্রমাণ দাও। [State and existence and uniqueness theorem for $y'(x)=f(x,y), y(x_0)=y_0$ in a bounded domain and prove the uniqueness theorem for it]

(খ) $\frac{dx}{dt}=1+x^2, x(0)=0$ আদিমান সমস্যার সমাধানের অস্তিত্ব ও অনন্যতা আলোচনা কর এবং এটি সমাধান কর। [Discuss the existence and uniqueness of solution of the initial value problem $\frac{dx}{dt}=1+x^2, x(0)=0$ and solve it]

২। (ক) লিপশিটস শর্ত ও লিপশিটস ধ্রুবক সংজ্ঞায়িত কর। পিকার্ড পদ্ধতির পর্যায়ক্রমিক আসন্নমান ব্যবহার করে $\frac{dy}{dx}=1+xy^2, y(0)=0$ এর তৃতীয় আসন্ন সমাধান বাহির কর। [Define Lipschitz condition and a Lipschitz constant. Use Pichard's method of successive approximations to find the third approximate solution $\frac{dy}{dx}=1+xy^2, y(0)=0$]

(খ) মৌলিক ম্যাট্রিক্স এর সংজ্ঞা দাও। $\frac{d\overline{x}}{dt}=\begin{pmatrix}5 & 2 & -2\\ 7 & 0 & -2\\ 11 & 1 & -3\end{pmatrix}\overline{X}$ যেখানে $\overline{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$ এর মৌলিক ম্যাট্রিক্স বাহির কর। [Define a fundamental matrix. Find the fundamental matrix for $\frac{d\overline{x}}{dt}=\begin{pmatrix}5 & 2 & -2\\ 7 & 0 & -2\\ 11 & 1 & -3\end{pmatrix}\overline{X}$ where $\overline{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$]

৩। (ক) আদিমান সমস্যা ও যোগজ সমীকরণের সংজ্ঞা দাও। প্রমাণ কর যে, একটি আদিমান সমস্যা একটি যোগজ সমীকরণের সমতুল্য। অতঃপর $x'=t^2+x^4, x(0)=1$ আদিমান সমস্যাটিকে যোগজ সমীকরণে পরিণত কর। [Define initial value problem and integral equation. Prove that an initial value problem is equivalent to an integral equation. Then convert the initial value problem $x'=t^2+x^4, x(0)=1$ to an integral equation]

(খ) সমাধান কর [Solve]: $\overline{x}(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\overline{x}(t)+\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}, \overline{x}(\pi)=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$

৪। (ক) যদি সমীকরণ $\overline{x'}=A\overline{x}$ এর (যেখানে $A=(a_{ij})$ একটি ধ্রুবক ম্যাট্রিক্স) সকল মূল ঋণাত্মক হয়, তবে প্রমাণ কর যে, উক্ত সমীকরণের সকল সমাধান অসীমতটীয়ভাবে সুস্থিত হবে।

[If all characteristic roots of A have negative real parts, then every solution of $\overline{x'}=A\overline{x}$ where $A=(a_{ij})$ is a cosntant matrix is asymptotically stable]

(খ) $\overline{X}'(t)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ -3 & 3 & -5 & 4\\ 8 & -4 & 4 & -4\\ 15 & -10 & 11 & -11\end{pmatrix}\overline{X}$ পদ্ধতিটির শূন্য সমাধানের সুস্থিতত্ব, অসীমতটীয় সুস্থিতত্ব বা অসুস্থিতত্ব নির্ণয় কর।

[Determine the stability, the asymptotic stability or the instability of the system $\bar{X}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -5 & 4 \\ 8 & -4 & 4 & -4 \\ 15 & -10 & 11 & -11 \end{pmatrix} \bar{X}$]

৫। (ক) লিনিয়ার, নন-লিনিয়ার এবং সিংগুলার যোগজ সমীকরণ এর সংজ্ঞা দাও। দেখাও যে, $\varphi(x) = xe^x$ হলো ভলতেরা যোগজ সমীকরণ $\varphi(x) = \sin x + 2\int_0^x \cos(x-\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi$ এর একটি সমাধান।
[Define linear, non-linear and singular integral equation. Show that $\varphi(x) = xe^x$ is a solution of the Voltera integral equation $\varphi(x) = \sin x + 2\int_0^x \cos(x-\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi$]

(খ) ভলতেরা যোগজ সমীকরণের সংজ্ঞা দাও। $y'' - 3y' + 2y = 4\sin x$, $y(0) = 1, y'(0) = -2$ আদিমান সমস্যাটিকে একটি দ্বিতীয় প্রকারের ভলতেরা যোগজ সমীকরণে রূপান্তরিত কর এবং এটি সমাধান কর।
[Define Voltera integral equation. Convert the initial value problem $y'' - 3y' + 2y = 4\sin x$, $y(0) = 1, y'(0) = -2$ into a Voltera integral equation of second kind and solve it]

৬। (ক) দ্বিতীয় প্রকারের ভলতেরা যোগজ সমীকরণ-
$x(t) = f(t) + \int_{t_0}^{t} K(t,s)\,x(s)\,dx, t \in [t_0, t_0 + a]$ এর অনন্য সমাধান বিদ্যমানতার প্রয়োজনীয় শর্তাবলি বর্ণনাসহ প্রমাণ কর।
[State and prove the set of conditions that ensure the existence of unique solution of the Voltera integral equation of the second kind $x(t) = f(t) + \int_{t_0}^{t} K(t,s)\,x(s)\,dx, t \in [t_0, t_0 + a]$]

(খ) সমাধান কর [Solve]: $x(t) = 1 + t^2 + \int_0^t \frac{1+t^2}{1+s^2} x(s)\,dx$

৭। (ক) যেকোনো ব্যবধিতে দ্বিতীয় প্রকার ফ্রেডহলম যোগজ সমীকরণটির পর্যায়ক্রমিক প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান কর। [In any interval solve the Fredholm integral equation of second kind by successive substitutions]

(খ) সমাধান কর: $x(t) = \left(\sin t - \frac{t}{4}\right) + \frac{1}{4}\int_0^{1/2} ts\,x(s)\,ds$ । সমাধানের সত্যতা যাচাই কর। [Solve $x(t) = \left(\sin t - \frac{t}{4}\right) + \frac{1}{4}\int_0^{1/2} ts\,x(s)\,ds$. Verify the reuslt]

৮। (ক) $y'' - y' = t^2, y(0) = 0, y(1) = 0$ সীমামান সমস্যাটির গ্রীন ফাংশন নির্ণয় কর এবং ইহার সাহায্যে সমাধান কর। [Construct Green's function for the following boundary value problem $y'' - y' = t^2, y(0) = 0, y(1) = 0$]

(খ) $y'' + \lambda y = 0, y(0) = 0, y'(\pi) = 0$ সীমামান সমস্যাটির আইগেন মান এবং অনুসারী আইগেন ফাংশন নির্ণয় কর। [Find the eigen values and the corresponding eigen functions of the boundary value problem $y'' + \lambda y = 0, y(0) = 0, y'(\pi) = 0$]