NUMSc-2013

১। (ক) প্রথম ক্রমের আদিমান সমস্যা সমাধানের বিদ্যমানতা সম্পর্কিত কসি-পিয়ানো উপপাদ্যটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর। [State and prove Cauchy-Peano existence theorem for the solution of a first order IVP]

(খ) $\frac{dy}{dx}=x^2y^2-\frac{3y}{x},\ y(1)=1$ আদিমান সমস্যাটির সমাধানের বিদ্যমানতা ও অনন্যতা যাচাই কর। সমস্যাটি সমাধান কর। সমাধানের বৈধ এলাকা বের কর। [Examine the existence and uniqueness of the solution of the IVP $\frac{dy}{dx}=x^2y^2-\frac{3y}{x},\ y(1)=1$. Find also the solution and its region of validity]

২। (ক) পিকার্ডের পর্যায়ক্রমিক আসন্নমান পদ্ধতি ব্যাখ্যা কর এবং ইহা ব্যবহার করে $x'=4t+2tx,\ x(0)=2$ আদিমান সমস্যার প্রথম তিনটি আসন্ন মান নির্ণয় কর। অতঃপর সঠিক সমাধান নির্ণয় কর। [Explain Picard's method of successive approximation and use it to find the first three approximation of the IVP $x'=4t+2tx,\ x(0)=2$ and hence find exact solution]

(খ) লিপসিজ শর্ত ও লিপসিজ ধ্রুবকের সংজ্ঞা দাও। লিপসিজ শর্ত কিভাবে প্রথম ক্রমের আদিমান সমস্যা সমাধানের অনন্যতার সাথে সম্পর্কিত তা ব্যাখ্যা কর। $f(x,y)=xy^2+y^4, |x|<1, |y-2|\le 3$ এর ক্ষেত্রে লিপসিজ ধ্রুবক নির্ণয় কর। $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ এর সমাধান কি অনন্য? [Define Lipschitz condition and Lipschitz constant. Explain how Lipschitz condition is related to the uniqueness of the solution of the first order IPV. Find the Lipschitz constant for $f(x,y)=xy^2+y^4, |x|<1, |y-2|\le 3$. Is the solution of $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ unique?]

৩। (ক) সমমাত্রিক জোটের মৌল সমাধান সেটের সংজ্ঞা দাও। প্রমাণ কর যে, সমমাত্রিক জোট $x'(t)=A(t)x$ (যেখানে $A(t)$ একটি অবিচ্ছিন্ন ম্যাট্রিক্স ফাংশন) এর মৌল সমাধান সেট বিদ্যমান। [Define a fundamental set of solutions of a homogeneous system. Prove that there exists fundamental set of solutions of the homogeneous system $x'(t)=A(t)x$, where $A(t)$ is a continuous matrix function]

(খ) সমমাত্রিক জোট $x_1'=-x_1+x_2-x_3,\ x_2'=-2x_2-9x_3,\ x_3'=x_2-2x_3$ এর একটি মৌল ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর। অতঃপর জোটটির সমাধান কর। [Compute a fundamental matrix of the homogeneous system $x_1'=-x_1+x_2-x_3,\ x_2'=-2x_2-9x_3,\ x_3'=x_2-2x_3$. Hence solve the system]

৪। (ক) প্রমাণ কর যে, $x'(t)=A(t)x(t)+b(t),\ x(t_0)=x_0$ অসমমাত্রিক সমীকরণ জোটের সমাধান $x(t)=\phi(t)\phi^{-1}(t_0)x_0+\phi(t)\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)b(s)\,ds$ যেখানে $A(t)$ একটি অবিচ্ছিন্ন $n\times n$ ম্যাট্রিক্স ফাংশন এবং $\phi(t)$ সংশ্লিষ্ট সমমাত্রিক জোটের মৌল ম্যাট্রিক্স যেখানে: $\phi(t_0)\ne I$ [Prove that the solution of the inhomogeneous system $x'(t)=A(t)x(t)+b(t),\ x(t_0)=x_0$ is $x(t)=\phi(t)\phi^{-1}(t_0)x_0+\phi(t)\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)b(s)\,ds$, where $A(t)$ is an $n\times n$ continuous matrix function and $\phi(t)$ is a fundamental matrix of the corresponding homogeneous system and $\phi(t_0)\ne I$]

(খ) সমাধান কর [Solve]: $\begin{matrix} x_1'=3x_1-x_2+1 \\ x_2=4x_1-x_2+t \end{matrix}$; $x(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

৫। (ক) প্রমাণ কর যে, $x'(t)=A(t)x$, যেখানে $A(t)\,[0,\infty)$ ব্যবধিতে একটি $n\times n$ ক্রমের অবিচ্ছিন্ন ম্যাট্রিক্স এবং x একটি n ভেক্টর এর সকল সমাধান সুস্থিত হবে যদি এবং কেবল যদি উহারা সীমায়িত হয়। [Prove that all solutions of $x'(t)=A(t)x$, where $A(t)$ is an $n\times n$ continuous matrix on $[0,\infty)$ and x is an n vector are stable iff they are bounded]

(খ) প্রমাণ কর যে, $x''+x=0$ এর শূন্য সমাধান সুষম সুস্থিত কিন্তু অসীমতটীয় সুস্থিত নয়। [Show that the zero solution of $x''+x=0$ is uniformly but not asymptotically stable]

৬। (ক) (i) যোজিত চিহ্নের অধীনে একটি ফাংশনের অন্তরীকরণের ব্যাখ্যা দাও। [Explain the differentiation of a function under integral sign]

(ii) দেখাও যে, $\phi(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{x}}$ ফাংশনটি $\int_0^x\frac{\phi(s)}{\sqrt{x-s}}ds=1$ যোগজ সমীকরণের একটি সমাধান। [Show that the function $\phi(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{x}}$ is a solution of the integral equation $\int_0^x\frac{\phi(s)}{\sqrt{x-s}}ds=1$]

(খ) যোগজ সমীকরণ $\phi(x)=e^{x^2}+\int_0^x e^{x^2-\xi^2}\phi(\xi)\,d(\xi)$ এর রিজলভেন্ট কার্নেল নির্ণয় কর। অতঃপর সমীকরণটি সমাধান কর। [Find the resolvent kernet and hence solve the integral equation $\phi(x)=e^{x^2}+\int_0^x e^{x^2-\xi^2}\phi(\xi)\,d(\xi)$]

৭। (ক) দেখাও যে, প্রতিসম কার্নেলের সকল পুনরুক্ত কার্নেলও প্রতিসম এবং প্রতিসম কার্নেলের আইগেনমানগুলি বাস্তব হবে। [Show that all iterated kernels of symmetric kernels are also symmetric and the eigenvalues of a symmetric kernel are real]

(খ) ডিজেনারেট কার্নেলের সংজ্ঞা দাও। যোগজ সমীকরণটি সমাধান কর [Define degenerate kernel. Solve the IE]:

$$\phi(x)=x+\lambda\int_0^\pi (1+\sin x\sin t)\phi(t)\,dt$$

৮। (ক) গ্রীন ফাংশনের সাহায্যে সীমানা সমস্যা $y''+\lambda y=x,\ y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ সমাধান কর। [Using Green's function solve the boundary value problem $y''+\lambda y=x,\ y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$]

(খ) যোগজ সমীকরণের আইগেনমান ও আইগেন ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। $x(t)=\lambda\int_{-1}^{1}(5ts^3+4t^2s+3ts)\,x(s)\,ds$ সমীকরণের আইগেনমান ও আইগেন ফাংশন নির্ণয় কর। [Define Eigenvalue and Eigenfunction of integral equation. Find the eigenvalues and eigen functions of $x(t)=\lambda\int_{-1}^{1}(5ts^3+4t^2s+3ts)\,x(s)\,ds$]