NUMSc-2014

ক-বিভাগ

১। ক) কখন $f(x, y)$ ফাংশন লিপসিজ শর্ত সিদ্ধ করবে? [When does $f(x, y)$

খ) কোন শর্তে $y'(x) = f(x, y), y(x_0) = y_0$ আদিমান সমস্যাটির অনন্য সমাধান আছে? [In what condition, the IVP $y'(x) = f(x, y), y(x_0) = y_0$ has a unique solution?]

গ) $y'(x) = f(x, y), y(x_0) = y_0$ আদিমান সমস্যার পিকার্ডের সূত্রটি লিখ। [Write down the Picard's formula for the IVP $y'(x) = f(x, y), y(x_0) = y_0$.]

ঘ) ভেক্টর ফাংশন $\mathbf{\Phi}_1, \mathbf{\Phi}_2, \cdots, \mathbf{\Phi}_n$ এর রনস্কিয়ান কী? [What is the Wronskian of the vector function Φ,Φ ,,Φ ?]

ঙ) $\boldsymbol{x}'(t) = A(t)\,\boldsymbol{x}(t)$ এর মৌল ম্যাট্রিক্স কী? [What is the fundamental matrix of $\boldsymbol{x}'(t) = A(t)\,\boldsymbol{x}(t)$?]

চ) $x'(t) = f(t, x)$ সমীকরণের সুস্থিত সমাধানের সংজ্ঞা দাও। [Define the stable solution of the equation $x'(t) = f(t, x)$]

ছ) একটি অন্তরক সমীকরণের সমাধান দৃঢ়ভাবে সুি২ত হলে, সুষম সুি২ত হবে কিনা? [Is the solution uniformly stable of a differential equation,

জ) পার্থক¨ কার্নেল কী?

ঝ) প্রতিসম কার্নেলের সংজ্ঞা দাও।

ঞ) অরৈখিক যোগজ সমীকরণ কী? [What is non-linear integral equation?]

ট) ব্যতিক্রমী যোগজ সমীকরণের পরিচয় লিখ। [Write the identity of the singular integral equation.]

ঠ) Sturm-Liouville সমস্যা কী? [What is Sturm-Liouville problem?]

খ-বিভাগ

২। $\frac{dx}{dt} = 1 + x^2, x(0) = 0$ আদিমান সমস্যার সমাধানের অস্তিত্ব ও অনন্যতা আলোচনা কর। [Discuss the existence and uniqueness of solution of the initial value problem $\frac{dx}{dt} = 1 + x^2, x(0) = 0$.]

৩। $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ সমীকরণ জোটের এক সেট মৌল সমাধান নির্ণয় কর, যেখানে $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ এবং $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ । [Find a fundamental set of solutions of the system of equations $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ where $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ and $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$]

৪। যোজিত চিহ্নের অধীনে একটি ফাংশনের অন্তরীকরণের ব্যাখ্যা দাও এবং অন্তরক ও যোগজ সমীকরণের মধ্যে সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা কর। [Explain the differentiation of a function underan integral sign and establish a relation between defferential and integral equation.]

৫। দেখাও যে, $u(x) = \left(1 + x^2\right)^{-\frac{3}{2}}$ হলে $u(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{y}{1+x^2} u(y)\,dy$ সমীকরণের একটি সমাধান। [Show that $u(x) = \left(1 + x^2\right)^{-\frac{3}{2}}$ is a solution of $u(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{y}{1+x^2} u(y)\,dy$.]

৬। সমাধান কর [Solve]: $x(t) = e^{-t} + 1 + \int_0^t e^{-(t-s)} x(s)\,ds$. সমাধানের সত্যতা যাচাই কর। [Verify your result.]

৭। ভলতেরা যোগজ সমীকরণের $Q(x) = \sin x + 2\int_0^x e^{x-s} Q(s)\,ds$ এর রিজলভেল্ট কার্নেল নির্ণয় কর। [Find the resolvet kernel of the VIE $Q(x) = \sin x + 2\int_0^x e^{x-s} Q(s)\,ds$.]

৮। আইগেনমান ও আইগেন ফাংশনের সংজ্ঞা দাও এবং $x(t) = \lambda \int_0^{\pi} \cos(s + t)\, x(s)\,ds$ যোগজ সমীকরণের জন্য এইগুলো নির্ণয় কর। [Define eigen values and eigen function and find these for $x(t) = \lambda \int_0^{\pi} \cos(s + t)\, x(s)\,ds$.]

৯। পিকার্ডের আনুক্রমিক আসন্নীকরণ পদ্ধতিতে আদিমান সমস্যা $\frac{dy}{dx} = x + y^2, y(0) = 0$ এর প্রথম তিনটি আসন্ন সমাধান নির্ণয় কর। [Using Picard's method of Successive approximation find the first three approximations to the solution of $\frac{dy}{dx} = x + y^2, y(0) = 0$.]

গ-বিভাগ

১০। $R=\{(t,x):|t-t_0|\le a,|x-x_0|\le b,a>0,b>0\}$ এলাকায় $f(t,x)$ অবিচ্ছিন্ন এবং x এর সাপেক্ষে লিপসিজ। দেখাও যে, t_0 এর একটি প্রতিবেশে আদিমান সমস্যা $x'=f(t,x),x(t_0)=x_0$ এর অনন্য সমাধান বিদ্যমান। [Suppose that $f(t,x)$ is continuous and Lipschitz with respect to x in $R=\{(t,x):|t-t_0|\le a,|x-x_0|\le b,a>0,b>0\}$. Show that the IVP $x'=f(t,x),x(t_0)=x_0$ has a unique solution on a neighborhood of t_0.]

১১। $\boldsymbol{x}(t)$ একটি n ভেক্টর এবং (t_1,t_2) ব্যবধিতে $A(t)$ অবিচ্ছিন্ন $n\times n$ ম্যাট্রিক্স হলে, প্রমাণ কর যে, $\boldsymbol{x}'(t)=A(t)\,\boldsymbol{x}(t)$ এর সকল সমাধানের সেট n মাত্রার একটি যোগাশ্রয়ী জগৎ গঠন করে। [Prove that the set of all solution of $\boldsymbol{x}'(t)=A(t)\,\boldsymbol{x}(t)$ where $\boldsymbol{x}(t)$ is an n-vector and $A(t)$ is a continuous $n\times n$ matrix function on some interval forms a linear space of dimension n.]

১২। বর্ণনাসহ পরামিতি পরিবর্তন সূত্র প্রমাণ কর। [State and prove the variation of constant formula.]

১৩। $\boldsymbol{x}'=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-2&-1&2\\-3&-2&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$ সমীকরণের সমাধানগুলি সুস্থিত, অস্থিত বা অসীমতটীয়ভাবে সুস্থিত কিনা তা নির্ণয় কর। [Determine whether each solution $\boldsymbol{x}(t)$ of the differential equation $\boldsymbol{x}'=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-2&-1&2\\-3&-2&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$ is stable, asymptotically stable or unstable.]

১৪। $y''(x)-2y'(x)-3y(x)=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$ আদিমান সমস্যাটিকে একটি যোগজ সমীকরণে রূপান্তরিত কর এবং এটি হতে তার সমাধান কর। [Convert the IVP $y''(x)-2y'(x)-3y(x)=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$ into an integral equation and hence solve it.]

১৫। ফ্রেডহল্‌মের দ্বিতীয় প্রকারের যোগজ সমীকরণের অনন্য সমাধান বিদ্যমানের জন্য প্রয়োজনীয় শর্ত উল্লেখসহ প্রমাণ কর। [State and prove a set of conditions for which Fredholm's integral equation of the second kind has a unique solution.]

১৬। সমাধান কর [Solve]: $x(t)=1+t^2+\int_0^1\frac{1+t^2}{1+s^2}x(s)\,ds.$

১৭। $y''-y'=t^2,\ y(0)=0,\ y(1)=0$ সীমামান সমস্যাটির গ্রীন ফাংশন গঠন কর এবং এটি ব্যবহার করে তার সমাধান কর। [Construct Green's function for the BVP $y''-y'=t^2,\ y(0)=0,\ y(1)=0$ and use it to find its solutions.]