# NUMSc-2015

## ক-বিভাগ

১। ক) যোগজ অন্তরক সমীকরণ কি? [What is integral differential equation?]

খ) লিপচিজ ধ্রুবকের সংজ্ঞা দাও। [Define Lipschitz constant.]

গ) $\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{A}(t)\bar{x}$ এর $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$ সমাধান তিনটি যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল হওয়ার শর্ত লিখ। [Write the condition for which the three solutions $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$ of $\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{A}(t)\bar{x}$ are linearly independent.]

ঘ) কখন অন্তরক সমীকরণ $\bar{x}' = f(t, x), x(t_0) = x_0$ এর সমাধানকে অসমীতটীয় সুস্থিত বলা হয়? [When the solution of the differential equation $\bar{x}' = f(t, x), x(t_0) = x_0$ is called asymptotically stable?]

ঙ) আইগেন মানের উপর নির্ভর করে কখন একটি অন্তরক সমীকরণের সমাধান সুস্থিত হবে? [When the solution of a differential will be stable depending on eigen values?]

চ) দ্বিতীয় প্রকারের সমমাত্রিক ভলতেরা যোগজ সমীকরণটি লিখ। [Write down the homogeneous Volterra integral equation of second kind.]

ছ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির আইগেন মান নির্ণয় কর। [Find the eigen values of the matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$.]

জ) পেরনের উপপাদ্যটি লিখ। [Write down the Perron theorem.]

ঝ) পুনরাবৃত্ত কার্নেল কি? [What is iterated kernel?]

ঞ) যোগজ সমীকরণের আইগেন মানের সংজ্ঞা দাও। [Define eigen values of an integral equation.]

ট) উদাহরণসহ ডিজেনারেট কার্নেলের সংজ্ঞা দাও। [Define degenerate kernel with example.]





ঠ) যোগজ সমীকরণে রিজলভেন্ট কার্নেল কী উদ্দেশ্যে ব্যবহৃত হয়? [What purpose we use resolvent kernel in integral equation?]

## খ-বিভাগ

২। আদিমান সমস্যা $\bar{x}' = t^2 + x^4, x(0) = 1$ এর সমতুল্য যোগজ সমীকরণ নির্ণয় কর এবং এই সমস্যাটির সমাধানের অস্তিত্বশীলতা ও অনন্যতা আলোচনা কর। [Determine the integral equation which is equivalent to the initial value problem $\bar{x}' = t^2 + x^4, x(0) = 1$ and discuss the existence and uniqueness of solutions of this problem.]

৩। প্রমান কর যে, $\bar{x}'(t) = A(t)\bar{x}$ সমমাত্রিক যোগশ্রয়ী ভেক্টর অন্তরক সমীকরণের একটি বুনিয়াদি সমাধান সেট বিদ্যমান, যেখানে $A(t)$ একটি অবিচ্ছিন্ন ম্যাট্রিক্স ফাংশন। [Prove that, there exists a fundamental set of solutions of the homogeneous linear vector differential equation $\bar{x}'(t) = A(t)\bar{x}$, where $A(t)$ is a continuous matrix function.]

$\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{y}{x}, y(1) = 2$ এর প্রথম তিনটি আসন্ন সমাধান নির্ণয় কর। [Using Picard's method of successive approximation find the first three approximations to the solution of the IVP $\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{y}{x}, y(1) = 2$.]

৫। যদি $A$ এর স্বভাবী মূলের সকল বাস্তব অংশ ঋণাত্মক হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\bar{x}' = A(t)\bar{x}$ এর প্রত্যেক সমাধান অসীমতটীয়ভাবে সুস্থিত হবে, যেখানে $A = (a_{ij})$ একটি ধ্রুবক ম্যাট্রিক্স। [If all the characteristic roots of $A$ have negative real parts, then prove that every solution of $\bar{x}' = A(t)\bar{x}$ will be asymptotically stable, where $A = (a_{ij})$ is a constant matrix.]

৬। প্রমাণ কর যে, $x' = A(t)x$ এর সকল সমাধান সুস্থিত হবে যদি এবং কেবল যদি উহারা আবদ্ধ হয়, যেখানে $A(t)$ হলো $[0, \infty]$ ব্যবধিতে $n \times n$ ক্রমের অবিচ্ছিন্ন ম্যাট্রিক্স এবং $x$ একটি $n$-ভেক্টর। [Prove that, all solutions of $x' = A(t)x$ are stable iff they are bounded, where $A(t)$ is an $n \times n$ continuous matrix on $[0, \infty]$ and $x$ is an $n$-vector.]

৭। প্রমাণ কর যে, প্রতিসম কার্নেলের সকল পুনরাবৃত্ত কার্নেলও প্রতিসম এবং প্রতিসম কার্নেলের আইগেন মানগুলি বাস্তব। [Prove that, all iterated kernels of symmetric kernels are also symmetric and eigen values of a symmetric kernel are real.]

৮। সমাধান কর: $x(t)=e^t-\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^1 x(s)ds$ এবং সমাধানের সত্যতা যাচাই কর। [Solve: $x(t)=e^t-\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^1 x(s)ds$ and verify your result.]

৯। $\varphi(x)=x+\lambda\int_0^{\pi}(1+\sin x\sin t)\varphi(t)dt$ যোগজ সমীকরণটি সমাধান কর। [Solve the integral equation $\varphi(x)=x+\lambda\int_0^{\pi}(1+\sin x\sin t)\varphi(t)dt$ .]

## গ-বিভাগ

১০। বর্ণনাসহ কশি-পিয়ানো অস্তিত্ব উপপাদ্যটি প্রমাণ কর। [State and prove Cauchy-Peano existence theorem.]

১১। দেখাও যে, $\frac{dy}{dx}=x^2y^2-\frac{3y}{x}, y(1)=1$ এর অনন্য সমাধান বিদ্যমান। সমস্যাটির সমাধান এবং সমাধানের বৈধ এলাকা বের কর। [Show that, $\frac{dy}{dx}=x^2y^2-\frac{3y}{x}, y(1)=1$ has a unique solution. Find also the solution and its region of validity.]

১২। $\overline{x}_1'=7x_1-x_2+6x_3, \overline{x}_2'=-10x_1+4x_2-12x_3, \overline{x}_3'=-2x_1+x_2-x_3$ যোগাশ্রয়ী অন্তরক সমীকরণ জোটটির একটি বুনিয়াদি ম্যাট্রিক্স বের কর। অতঃপর জোটটি সমাধান কর। [Compute the fundamental matrix of the system if linear differential equations $\overline{x}_1'=7x_1-x_2+6x_3, \overline{x}_2'=-10x_1+4x_2-12x_3, \overline{x}_3'=-2x_1+x_2-x_3$ ]

১৩। ফ্রেডহ্লম রৈখিক যোগজ সমীকরণ $x(t)=f(t)+\lambda\int_a^b k(t,s)x(s)ds, t\in[a,b]$ এর অনন্য সমাধান বিদ্যমানের প্রয়োজনীয় শর্তাবলি বর্ণনা ও প্রমাণ কর। [State and prove a set of conditions for which the Fredholm linear-integral equation $x(t)=f(t)+\lambda\int_a^b k(t,s)x(s)ds, t\in[a,b]$ has a unique solution.]





১৪। $\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=0, y(0)=0, y'(0)=1$ আদিমান সমস্যাটিকে একটি যোগজ সমীকরণে রূপান্তরিত কর এবং তার সমাধান কর। [Transform the IVP $\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=0, y(0)=0, y'(0)=1$ into an integral equation and solve it.]

১৫। ভলতেরার দ্বিতীয় প্রকারের অযোগাশ্রয়ী যোগজ সমীকরণের অনন্য সমাধান বিদ্যমানতার শর্তসমূহের বর্ণনা ও প্রমাণ দাও। [State and prove a set of conditions for which Volterra non-linear integral equation of second kind has a unique solution.]

১৬। $\varphi(x)=\cos 3x+\lambda\int_0^{\pi}\cos(x+y)\varphi(y)dy$ যোগজ সমীকরণটির আইগেন মান ও আইগেন ফাংশন নির্ণয় কর। [Find the eigen values and eigen functions of the integral equation $\varphi(x)=\cos 3x+\lambda\int_0^{\pi}\cos(x+y)\varphi(y)dy$ .]

১৭। $y''+\pi^2y=\sin\pi x, y(0)=y(1), y'(0)=y'(1)$ সীমামান সমস্যার জন্য একটি গ্রীণ ফাংশন গঠন কর। [Construct a Green's function for the boundary value problem $y''+\pi^2y=\sin\pi x, y(0)=y(1), y'(0)=y'(1)$ .]