NUMSc-2020

ক-বিভাগ

১। (ক) লিপসিজ শর্ত ও লিপসিজ ধ্রুবক সংজ্ঞায়িত কর। [Define Lipschitz condition and Lipschitz constant.]

(খ) একটি দ্বিতীয় ক্রমের আদিমান সমস্যা লিখ। [Write down a second order IVP.]

(গ) কসি-পিয়ানো অস্তিত্ববাদ উপপাদ্যটি বর্ণনা কর। [State Cauchy-Peano existence theorems.]

(ঘ) মৌল ম্যাট্রিক্স এর সংজ্ঞা দাও। [Define fundamental matrix.]

(ঙ) কী শর্ত সাপেক্ষে $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ এর তিনটি সমাধান $x_1(t), x_2(t)$ এবং $x_3(t)$ যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল হবে? [What is the condition that the solutions $x_1(t), x_2(t)$ and $x_3(t)$ of $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ are linearly independent?]

(চ) যদি $\tau = 3, 3$ কোনো সমমাত্রিক জোটের আইগেন মান হয়, তবে উক্ত সমীকরণ জোটের অনির্ভরশীল সমাধান কী কী? [If $\tau = 3, 3$ are the Eigen values of a homogeneous system, then what are the independent solutions of the system.]

(ছ) যোগজ সমীকরণের সংজ্ঞা দাও। [Define integral equation.]

(জ) ভলতেরা ও ফ্রেডহোম যোগজ সমীকরণ তুমি কীভাবে শনাক্ত করবে? [How can you identify the Volterra and Fredholm integral equations?]

(ঝ) সুষম স্থিতিশীলতার সংজ্ঞা দাও। [Define uniform stability.]

(ঞ) দ্বিতীয় প্রকারের ভলতেরা অসমমাত্রিক সমীকরণের সাধারণ আকারটি লেখ। [Write the general form of non-homogeneous VIE of second kind.]

(ট) গ্রীন ফাংশন সংজ্ঞায়িত কর। [Define Green's function.]

(ঠ) দ্বিতীয় ক্রমের সীমানা-মান সমস্যার একটি উদাহরণ দাও। [Give an example of second order boundary value problem.]

খ-বিভাগ

২। দেখাও যে, $f(t, x) = x^2$ ফাংশনটি $R = \{(t, x) : |t| \le 1, |x-1| \le 1\}$ আয়তকার এলাকায় লিপসিজ শর্ত সিদ্ধ করে। লিপসিজ ধ্রুবকও নির্ণয় কর। [Show that the function $f(t, x) = x^2$ satisfy the Lipschitz condition in the rectangular region $R = \{(t, x) : |t| \le 1, |x-1| \le 1\}$. Also find the Lipschitz constant.]

৩। পিকার্ডের পর্যায়ক্রমিক আসন্ন মান পদ্ধতি ব্যবহার করে আদিমান সমস্যা $\frac{dy}{dx} = x + y, y(0) = -1$ এর প্রথম তিনটি আসন্ন মান নির্ণয় কর। [Using Picard's method of successive approximation find the first three approximations of the IVP $\frac{dy}{dx} = x + y, y(0) = -1$.]

৪। প্রথম ক্রমের n-সংখ্যক অন্তরক সমীকরণের একটি সমীকরণ জোট লেখ। অতঃপর সমীকরণ জোটটিকে $x'(t) = A(t)x + b(t)$ আকারে পরিণত কর। [Write down a system of first order n-linear differential equations. Also convert the system into the form $x'(t) = A(t)x + b(t)$.]

৫। অসমমাত্রিক সমীকরণ জোট $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + b(t)$ এর সমাধানে ধ্রুবক পরিবর্তন পদ্ধতি বর্ণনা ও প্রমাণ কর। [State and prove the variation of constants formula for the non-homogeneous system $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + b(t)$.]

৬। অন্তরক সমীকরণ $x'' + 2x' + x = 0$ এর শূন্য সমাধানের স্থিতিশীলতা এবং অসীমতটীয় স্থিতিশীলতা পরীক্ষা কর। [Test the stability and asymptotically stability of zero solution of the DE $x'' + 2x' + x = 0$.]

৭। ভলতেরা যোগজ সমীকরণ $x(t) = 1 + \int_0^t x(s)\,ds$ এর রিজলভেন্ট কার্নেল নির্ণয় কর। অতঃপর সমীকরণটি সমাধান কর। [Find the resolvent kernel and hence solve the VIE $x(t) = 1 + \int_0^t x(s)\,ds$.]

৮। $x(t)=\left(\sin t-\frac{t}{4}\right)+\frac{1}{4}\int_0^{1/2} t\,s\,x(s)\,ds$ যোগজ সমীকরণটি সমাধান কর। [Solve the IE: $x(t)=\left(\sin t-\frac{t}{4}\right)+\frac{1}{4}\int_0^{1/2} t\,s\,x(s)\,ds$.]

৯। প্রতিসম কার্নেলের সংজ্ঞা দাও। দেখাও যে, প্রতিসম কার্নেলের আইগেন মানসমূহ বাস্তব। [Define symmetric kernel. Show that eigen values of a symmetric kernel is real.]

গ-বিভাগ

১০। প্রমাণ কর যে, আদিমান সমস্যা $x'(t)=f(t,x), x(t_0)=x_0$, যোগজ সমীকরণ $x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(t,x(s))\,ds$ এর সমতুল্য। অতঃপর আদিমান সমস্যা $x'(t)=t^2+x^4, x(0)=1$ এর সমতুল্য যোগজ সমীকরণ নির্ণয় কর। [Prove that the IVP $x'(t)=f(t,x), x(t_0)=x_0$ is equivalent to the integral equation $x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(t,x(s))\,ds$. Also determine the integral equation which is equivalent to the IVP $x'(t)=t^2+x^4, x(0)=1$.]

১১। আদিমান সমস্যা $\frac{dx}{dt}=f(t,x), x(t_0)=x_0$ এর জন্য অস্তিত্ব ও অনন্যতা উপপাদ্য বর্ণনা কর। অতঃপর আদিমান সমস্যা $\frac{dx}{dt}=1+x^2, x(0)=0$ এর সমাধানের অস্তিত্ব ও অনন্যতা আলোচনা কর। [State the existence and uniqueness theorem for IVP $\frac{dx}{dt}=f(t,x), x(t_0)=x_0$. Also discuss the existence and uniqueness of the solution of the IVP $\frac{dx}{dt}=1+x^2, x(0)=0$ and solve it.]

১২। প্রমাণ কর যে, $x'(t)=A(t)x(t)$ এর সকল সমাধান সেট একটি n-মাত্রার লিনিয়ার জগত গঠন কর। যেখানে $A(t)$ একটি $n\times n$ ক্রমের অবিচ্ছিন্ন ম্যাট্রিক্স এবং $x(t)$ একটি n ভেক্টর। [Prove that the set of all solutions of $x'(t)=A(t)x(t)$ where $A(t)$ is a continuous $n\times n$ matrix function on some interval (t_1,t_2) and $x(t)$ is an n-vector forms a linear space of dimension n.]

১৩। নিম্নলিখিত রৈখিক সমমাত্রিক সমীকরণ জোট এর মৌল ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর। অতঃপর সমীকরণ জোটটি সমাধান কর: $x_1'=3x_1+x_2-x_3, x_2'=x_1+3x_2-x_3, x_3'=3x_1+3x_2-x_3$। [Compute a fundamental matrix of a homogeneous linear system $x_1'=3x_1+x_2-x_3, x_2'=x_1+3x_2-x_3, x_3'=3x_1+3x_2-x_3$. Also solve the system.]

১৪। উদাহরণসহ স্থিতিশীলতার সংজ্ঞা দাও। প্রমাণ কর যে, $x'=A(t)x$ এর সকল সমাধান স্থিতিশীল যদি এবং কেবল যদি ইহারা আবদ্ধ হয়। যেখানে $A(t)$ একটি $[0,\infty]$ ব্যবধিতে n-ক্রমের অবিচ্ছিন্ন ম্যাট্রিক্স এবং x একটি n-ক্রমের ভেক্টর। [Define stability with example. Prove that all solutions of $x'=A(t)x$ where $A(t)$ is an $n\times n$ continuous matrix on $[0,\infty]$ and x is an n-vector are stable iff they are bounded.]

১৫। প্রথম প্রকার ভলতেরা যোগজ সমীকরণের সাধারণ আকারটি লেখ। অতঃপর ইহাকে দ্বিতীয় প্রকারের ভলতেরা যোগজ সমীকরণে রূপান্তরের শর্তসমূহ উল্লেখ কর। প্রথম প্রকারের ভলতেরা যোগজ সমীকরণ $t=\int_0^t 3^{t-s}x(s)\,ds$ সমাধান কর। [Write down the general form of VIE of 1st kind. Also mention the conditions for which it may be converted of VIE of 2nd kind. Solve the VIE of 1st kind $t=\int_0^t 3^{t-s}x(s)\,ds$.]

১৬। ফ্রেডহোম যোগজ সমীকরণ $x(t)=f(t)+\tau\int_a^b k(t,s)\,x(s)\,ds, t\in[a,b]$ এর পর্যায়ক্রমিক প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান কর। [Solve the Fredholm integral equation $x(t)=f(t)+\tau\int_a^b k(t,s)\,x(s)\,ds, t\in[a,b]$ by the method of successive substitutions.]

১৭। যোগজ সমীকরণ $x(t)=\tau\int_{-1}^{1}(5ts^3+4t^2s+3ts)\,x(s)\,ds$ এর আইগেন মান ও আইগেন ফাংশনসমূহ নির্ণয় কর। [Determine the eigen values and eigen functions of the IE $x(t)=\tau\int_{-1}^{1}(5ts^3+4t^2s+3ts)\,x(s)\,ds$.]