NUMSc-2021

ক-বিভাগ

১। (ক) $y'(x)=f(x,y), y(x_0)=y_0$ আদিমান সমস্যার পিকার্ডের সূত্রটি লেখ। [Write down the Picard's formula for the IVP $y'(x)=f(x,y), y(x_0)=y_0$.]

(খ) $R=\{f(x,y):|x-1|\le 3,|y|\le 2\}$ দ্বারা বর্ণিত আয়তাকার অঞ্চলটি অঙ্কন কর। [Draw the rectangular region $R=\{f(x,y):|x-1|\le 3,|y|\le 2\}$.]

(গ) $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 4 & 0\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির আইগেন মান নির্ণয় কর। [Find the eigen values of the matrix $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 4 & 0\end{bmatrix}$.]

(ঘ) একটি ম্যাট্রিক্সের নর্ম সংজ্ঞায়িত কর। [Define the norm of a matrix.]

(ঙ) অসীমতটীয় সুস্থিতির সংজ্ঞা দাও। [Devine asymptotic stability.]

(চ) একটি অন্তরক সমীকরণ কখন দৃঢ়ভাবে সুস্থিত হবে? [When a solution of a differential equation will strongly stable?]

(ছ) যোগজ অন্তরক সমীকরণ কী? [What is integro-differential equation?]

(জ) প্রথম প্রকারের ফ্রেডহল্‌ম সমীকরণের সাধারণ আকার লেখ। [Write the Fredholm integral equation of first kind.]

(ঝ) প্রতিসম কার্নেল সংজ্ঞায়িত কর। [Define symmetric Kernel.]

(ঞ) পুনরাবৃত্ত কার্নেল ও রিজলভেন্ট কার্নেলের মধ্যে সম্পর্ক লেখ। [Write down the relation between iterated Kernel and resolvent Kernel.]

(ট) ফাংশনের লাম্বিক সেট কী? [What do you mean by orthogonal set of a function?]

(ঠ) Strum-Liouville সমস্যা কী? [What is Sturm-Liouville problem?]

খ-বিভাগ

২। আদিমান সমস্যা $\frac{dy}{dx}=xy^3, y(0)=1$ এর সমাধানের অস্তিত্বশীলতা ও অনন্যতা আলোচনা কর। [Discuss the existence and uniqueness of the solution of the IVP $\frac{dy}{dx}=xy^3, y(0)=1$.]

৩। প্রমাণ কর যে, সমমাত্রিক ভেক্টর সমীকরণ $\frac{d\underline{x}}{dt}=\underline{A}(t)\underline{x}$ এর m সংখ্যক সমাধানের যোগাশ্রয়ী সমাবেশ ও অন্তরক সমীকরণটির সমাধান হবে। [Prove that a linear combination of m solutions of the homogeneous vector differential equation $\frac{d\underline{x}}{dt}=\underline{A}(t)\underline{x}$ is also a solution of it.]

৪। পিকার্ডের পর্যায়ক্রমিক আসন্ন মান পদ্ধতি ব্যাখ্যা কর। [Explain the Picard's method of successive approximation.]

৫। $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ -3 & 1 & -1\end{pmatrix}\underline{x}$ সমীকরণটির শূন্য সমাধানের সুস্থিতিত্ব পরীক্ষা কর। [Examine the uniform stability of the zero solution of $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ -3 & 1 & -1\end{pmatrix}\underline{x}$.]

৬। দেখাও যে, $u(x)=(1+x^2)^{-3/2}$ হলো $u(x)=\frac{1}{1+x^2}-\int_0^x \frac{y}{1+x^2}u(y)\,dy$ সমীকরণের একটি সমাধান। [Show that, $u(x)=(1+x^2)^{-3/2}$ is a solution of $u(x)=\frac{1}{1+x^2}-\int_0^x \frac{y}{1+x^2}u(y)\,dy$.]

৭। নিচের ফ্রেডহল্‌ম সমীকরণটি সমাধান কর [Solve the Fredholm equation]:

$$x(t) = e^t - \frac{1}{2}e + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 x(s)\,ds$$

৮। দেখাও যে, $x'' + x = 0$ এর শূন্য সমাধান সুষমভাবে সুস্থিত কিন্তু অসীমতটীয়ভাবে সুস্থিত নয়। [Prove that the zero solution of $x'' + x = 0$ is uniformly stable, but not asymptotically stable.]

৯। $y'' + \lambda y = 0, y(0) = 0, y'(r) = 0, \lambda \geq 0$ Sturm-Liouville সমস্যাটির আইগেন মান ও আইগেন ফাংশন নির্ণয় কর। [Find the eigen values and eigen functions of the Sturm-Liouville problem $y'' + \lambda y = 0, y(0) = 0, y'(r) = 0, \lambda \geq 0$.]

গ-বিভাগ

১০। কসি-পিয়ানো অস্তিত্ববাদ উপপাদ্য বর্ণনা ও প্রমাণ কর। [State and prove Cauchy-Peano existence theorem.]

১১। পিকার্ডের পর্যায়ক্রমিক আসন্নমান পদ্ধতি ব্যবহার করে $\frac{dy}{dx} = -y, y(0) = 2$ আদিমান সমস্যাটি সমাধান কর। [Using Picard's method of successive approximation solve the IVP $\frac{dy}{dx} = -y, y(0) = 2$.]

১২। বর্ণনাসহ পরামিতি পরিবর্তন সূত্রটি প্রমাণ কর। [State and prove variation of parameters formula.]

১৩। অন্তরজ ও যোগজ সমীকরণের মধ্যে সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা কর। [Establish the relation between differential and integral equation.]

১৪। $\phi(t) = \lambda\int_0^r \cos(t+s)\phi(s)\,ds$ সমীকরণটির আইগেন মান ও আইগেন ফাংশন নির্ণয় কর। [Find the eigen values and eigen functions of the equation $\phi(t) = \lambda\int_0^r \cos(t+s)\phi(s)\,ds$.]

১৫। সমাধান কর [Solve]: $x(t) = 1 + t^2 + \int_0^t \frac{1+t^2}{1+s^2}x(s)\,ds$

১৬। Voltera এর দ্বিতীয় প্রকারের যোগজীকরণ সমীকরণের অনন্য সমাধান বিদ্যমানতার শর্তসমূহের বর্ণনা ও প্রমাণ দাও। [State and prove the conditions for which Voltera integral equation of second kind has a unique solution.]

১৭। $y'' + r^2 y = \sin rx, y(0) = y(1), y'(0) = y'(1)$ সীমামান সমস্যার জন্য একটি Green ফাংশন গঠন কর। [Using Green's functions solve the BVP $y'' + r^2 y = \sin rx, y(0) = y(1), y'(0) = y'(1)$.]