

NUH-2011

৬। (ক) প্রমাণ কর যে, চিত্রণ $f(x, y) = x + y, X \times Y$ হতে X -এ এবং $g(\alpha, x) = \alpha x, R \times X$ হতে X -এ অবিচ্ছিন্ন, যেখানে X একটি নর্ম জগত এবং R বাস্তব ফিল্ড। [Prove that the mapping, $f(x, y) = x + y, X \times Y$ into X and $g(\alpha, x) = \alpha x, R \times X$ into X are continuous; where X is a normal space and R is the real number field]

(খ) প্রমাণ কর যে, l_p এর দ্বৈত জগত l_q , যেখানে $1 < p < \infty$ এবং $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

[Prove that the dual space of l_p is l_q , where $1 < p < \infty$ and $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$]

৭। (ক) কচি-সোয়ার্জ-এর অসমতা বর্ণনা ও প্রমাণ কর। [State and prove Cauchy Schwartz inequality]

(খ) হিলবার্ট জগত X -এর M এবং N যদি $M \perp N$ শর্তে বদ্ধ উপজগত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, উপজগত $M + N = \{x + y \in X : z \in M \text{ এবং } y \in N\}$ বদ্ধ হবে। [If M and N are closed subspace of Hilbert space X Such that $M \perp N$, Prove that the subspace $M + N = \{x + y \in X : z \in M \text{ and } y \in N\}$ is also closed]

৮। (ক) উদাহরণসহ হিলবার্ট জগতের সংজ্ঞা দাও। যদি x ও y কোনো হিলবার্ট জগতের ভেক্টর হয় তবে প্রমাণ কর যে, $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ [Define Hilbert space with an example. If x and y are two vectors in a Hilbert space, then show that $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$]

(খ) দেখাও যে, একটি হিলবার্ট জগত H -এর একটি আবদ্ধ উত্তল উপসেট C লঘিষ্ঠ নর্মবিশিষ্ট একটি অনন্য ভেক্টর ধারণ করে। [Show that a closed convex subset C of a Hilbert space H contains a unique vector of smallest norm]

৯। বানাক জগত বলতে কি বুঝ? প্রমাণ কর যে, $l_p, 1 \leq p < \infty$ জগতটি একটি বানাক জগত। [Define Banach space. Prove that the space $l_p, 1 \leq p < \infty$ is a Banach space]

১০। (ক) সংকোচন চিত্রণ এর সংজ্ঞা দাও। বানাকের সংকোচন নীতি বর্ণনাসহ প্রমাণ কর। [Define Contraction mapping. State and prove Banach Contraction Theorem]

(খ) (i) $f(x) = -x \forall x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$ চিত্রণটির কোন নির্দিষ্ট বিন্দু আছে কি-না ব্যাখ্যা কর। [Explain whether the mapping $f(x) = -x \forall x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$ has any fixed point]

(ii) মনে করি, $T : R \rightarrow R$ চিত্রটি $T(x) = \frac{1}{2}x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। দেখাও যে, T বানাক সংকোচন নীতি সিদ্ধ করে এবং T এর একটি অনন্য নির্দিষ্ট বিন্দু আছে।

[Let $T : R \rightarrow R$ be defined by $T(x) = \frac{1}{2}x$. Show that T satisfies the Banach Contraction Principle and T has a unique fixed point]