NUH-2012

৬। (ক) উদাহরণসহ বানাক জগতের সংজ্ঞা দাও। প্রমাণ কর যে, ইউক্লিডিও জগত একটি বানাক জগত। [Define a Banach space with example. Prove that the Euclidean space is Banach space]

(খ) যদি M একটি বানাক জগত N-এর একটি বদ্ধ রৈখিক উপজগত হয় এবং একটি ভাগফল জগত $\frac{N}{M}$ এর কোসেট $x+M$ এর নর্ম $\|x+m\| = \inf\{\|x+m\| : m \in M\}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{N}{M}$ একটি স্বভাবী রৈখিক জগত। [If M is a closed linear subspace of a Banach space N and if the norm of a coset x + m = in the quotient space $\frac{N}{M}$ is defined by $\|x+m\| = \inf\{\|x+m\| : m \in M\}$, then show that $\frac{N}{M}$ is a normed linear space]

৭। (ক) প্রমাণ কর যে, X-এ একটি রৈখিক অপারেটর $T: X \to Y$ অবিচ্ছিন্ন হবে যদি এবং কেবল যদি ইহা সীমাবদ্ধ হয়। [Prove that a linear operator $T: X \to Y$ is continuous on X if and only if it is bounded]

(খ) যদি M হিলবার্ট জগত X-এর একটি বদ্ধ রৈখিক উপজগত হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $X = M \oplus M^{\perp}$, যেখানে $M^{\perp}$ হচ্ছে M-এর লম্ব পূরক সেট। [If M is a closed linear subspace of Hilbert space X, then prove that $X = M \oplus M^{\perp}$, where $M^{\perp}$ is the orthogonal complement of M]

৮। (ক) হিলবার্ট সংলগ্ন অপারেটরের সংজ্ঞা দাও। প্রমাণ কর যে, একটি হিলবার্ট জগত X-এ একটি অপারেটর T সকল $x \in X$ এর জন্য স্বভাবী হবে যদি এবং কেবল যদি $\|T^*(x)\| = \|T(x)\|$ হয়। [Define Hilbert adjoint operator. Prove that an operator T on a Hilbert space X is normal if $\|T^*(x)\| = \|T(x)\|$ and only holds for all $x \in X$]

(খ) যদি হিলবার্ট জগত X-এ $T: X \to Y$ একটি সীমাবদ্ধ রৈখিক অপারেটর হয়, তবে প্রমাণ কর যে, T স্বয়ং সংলগ্ন হবে যদি এবং কেবল যদি $< T(x), x >$ সকল $x \in X$ এর জন্য বাস্তব হয়। [If $T : X \to X$ is a bounded linear operator on a Hilbert space X, then prove that T is self-adjoint iff $< T(x), x >$ is real $x \in X$]

৯। (ক) যদি হিলবার্ট জগত X-এ T_1 এবং T_2 দুটি স্বয়ং সংলগ্ন অপারেটর হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, T_1 T_2 স্বয়ং সংলগ্ন হবে যদি এবং কেবল যদি $T_1T_2 = T_2T_1$ হয়। [If T_1 and T_2 are two self-adjount operators on a Hilbert space X, then prove that, T_1 T_2 is self-adjoint if and only if T_1 T_2 = T_2 T_1]

(খ) যদি হিলবার্ট জগত X-এ $T: X \to X$ একটি সীমাবদ্ধ রৈখিক অপারেটর হয়, তাহলে $T, S \in \beta(X)$ এর জন্য প্রমাণ কর যে [If T is a bounded linear operator on a Hilbert space X into itself, then for $T, S \in \beta(X)$ prove that],

(i) $(T+S)^* = T^* + S$;

(ii) $\|T^*\| = \|T\|$

১০। (ক) উদাহরণসহ নির্দিষ্ট বিন্দুর সংজ্ঞা দাও। যদি X একটি বানাক জগত হয় এবং $T: X \to X$ চিত্রণ যেকোনো পূর্ণসংখ্যা $r > 0$ এর জন্য T^r একটি সংকোচন চিত্রণ হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, T এর একটি অনন্য নির্দিষ্ট বিন্দু আছে। [Define a fixed point with example. If X is a Banach space and $T : X \to X$ is such that T^r is contraction mapping for some integer r > 0, then prove that T has a unique fixed point]

(খ) যদি $T: R \to R$ এ এমন একটি চিত্রণ হয় যেন $\|T(x) - T(y)\| \le \|x - y\|$, তাহলে T-এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু নাও থাকতে পারে উদাহরণসহ এর যথার্থ নিরূপণ কর। [If T be a mapping of R into itself with $\|T(x) - T(y)\| \le \|x - y\|$, then T may not have any fixed point justify your answer with an example]