

## NUH-2018

## ক-বিভাগ

- ১। (ছ) নর্মেড জগত কী? [What is a normed space?]  
 (জ) অপারেটর এর লেখচিত্র বলতে কী বুঝ? [What do you mean by a graph of an operator?]  
 (ঝ) কখন অন্তঃগুণন জগতকে ইউক্লিডীয় জগত বলা হয়? [When an inner product space is called an Euclidean space?]  
 উত্তর: বাস্তব সংখ্যার ফিল্ডে যেকোনো সসীম মাত্রা বিশিষ্ট অন্তঃগুণন জগতকে ইউক্লিডীয় জগত বলা হয়।  
 (ঞ) কখন সীমাবদ্ধ যোগাশ্রয়ী অপারেটরকে স্বকীয়-এডজয়েন্ট বলা হয়? [When a bounded linear operator is called self-adjoint?]  
 (ট) অন্তঃগুণন জগত  $X$  -এর উপসেট  $A$  -এর পরস্পর লম্ব পূরক বের কর। [Find the orthogonal complement of a subset  $A$  of an inner product space  $X$ .]  
 (ঠ) বানাক জগতে একটি ঘূর্ণায়মান তলের কতগুলো নির্দিষ্ট বিন্দু আছে? [How many fixed points have a rotation of the plane in a Banach space?]  
 উত্তর: বানাক জগতে একটি ঘূর্ণায়মান তলের একটি নির্দিষ্ট বিন্দু আছে।

## খ-বিভাগ

- ৬। খোলা চিত্রণ উপপাদ্যটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর। [State and prove open mapping theorem.]  
 ৭। যদি  $X$  -একটি অন্তঃগুণন জগত হয় এবং  $x, y \in X$  হয়, তবে প্রমাণ কর যে,  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ . [If  $X$  is an inner product space and  $x, y \in X$ , then prove that,  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ .]  
 ৮। প্রমাণ কর যে, হিলবার্ট জগত  $H$  -এর উপর একটি আবদ্ধ উত্তল উপসেট  $C$ , একটি ক্ষুদ্রতম নর্মের একক ভেক্টর ধারণ করে। [Prove that a closed convex subset  $C$  of a Hilbert space  $H$  contains a unique vector of smallest norm.]  
 ৯। যদি একটি হিলবার্ট জগত  $H$  -এর উপর  $T$  একটি আবদ্ধ যোগাশ্রয়ী অপারেটর হয় যেন  $\langle Tx, x \rangle = 0$  হয়  $x$  -এর সকল মানের জন্য, তবে প্রমাণ কর যে,  $T = 0$ . [If  $T$  is a bounded linear operator on a Hilbert space  $X$  for which  $\langle Tx, x \rangle = 0$  for all  $x \in X$ , then prove that  $T = 0$ .]

## গ-বিভাগ

- ১৪। দেখাও যে,  $l_p, 1 \leq p < \infty$  একটি বানাক জগত। [Show that  $l_p, 1 \leq p < \infty$  is a Banach space.]  
 ১৫। ধর, নর্মেড যোগাশ্রয়ী জগত  $N$  -এর একটি বদ্ধ যোগাশ্রয়ী উপজগত  $M$ , যদি বিভাজন জগত  $\frac{N}{M}$  এ কোসেট  $(x + M)$  এর নর্ম  $\|x + M\| = \inf \{\|x + m\| : m \in M\}$  দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তবে দেখাও যে,  $\frac{N}{M}$  একটি নর্মেড যোগাশ্রয়ী। [Let  $M$  be a closed linear subspace of a normed linear space  $N$ . If the norm of a coset  $x + M$  is the quotient space  $\frac{N}{M}$  is defined by  $\|x + M\| = \inf \{\|x + m\| : m \in M\}$ . Then show that  $\frac{N}{M}$  is a normed linear space.]  
 ১৬। হিলবার্ট জগতের ক্ষেত্রে বর্ণনাসহ অভিক্ষেপ উপপাদ্যটির প্রমাণ উপস্থাপন কর। [Present a proof of the projection theorem with its statement in the Hilbert space.]  
 ১৭। ধর, নর্মেড জগতে  $T$  একটি সংকোচন চিত্রণ। দেখাও যে,  $T$  -এর একটি অনন্য নির্দিষ্ট বিন্দু আছে। [Let  $T$  be a contraction mapping in a normed space. Show that  $T$  has a unique fixed point.]