

NUH-2019

ক-বিভাগ

- ১। (ছ) বানাক জগত বলতে কী বুঝ? [What do you mean by Banack space?]
- (জ) ভেক্টর জগত X এ অন্তঃগুণনের নর্ম কত? [What is the norm of an inner product on a vector space X ?]
- (ঝ) কসি সোয়ার্জের অসমতাটি বর্ণনা কর। [State Cauchy-Schwartz inequality.]
- (ঞ) হিলবার্ট জগতের ক্ষেত্রে অভিক্ষেপ উপপাদ্যটি লিখ। [Write down the projection theorem in the Hilbert space.]
- (ট) হিলবার্ট জগতে এডজয়েন্ট অপারেটর বলতে কী বুঝ? [What do you mean by adjoint operator in the Hilbert space?]
- (ঠ) ধর $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ চিত্রণটি $T(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। T এর নির্দিষ্ট বিন্দুগুলো বাহির কর। [Let $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be defined by $T(x) = x^2$. Determine the fixed point of T .]

খ-বিভাগ

- ৬। প্রমাণ কর যে, $g(\alpha, x) = \alpha x$ চিত্রণটি $\mathbb{R}X$ হতে X এ অবিচ্ছিন্ন যেখানে X একটি নর্মড জগত এবং \mathbb{R} হচ্ছে বাস্তব সংখ্যার ফিল্ড। [Prove that the mapping $g(\alpha, x) = \alpha x$ on $\mathbb{R}X$ into X is continuous where X is a normed space and \mathbb{R} is the field of real numbers.]
- ৭। যদি x ও y অন্তঃগুণন জগত X এর দুইটি ভেক্টর হয় তবে দেখাও যে [If x and y are two vectors in an inner product space X then show that],
- $$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$
- ৮। যদি হিলবার্ট জগত X এ T_1 এবং T_2 দুইটি স্বকীয় এ্যাডজয়েন্ট অপারেটর হয় তবে প্রমাণ কর যে, $T_1 T_2$ স্বকীয় এ্যাডজয়েন্ট যদি এবং কেবলমাত্র যদি $T_1 T_2 = T_2 T_1$ হয়। [If T_1 and T_2 are self adjoint operators on a Hilbert space X then prove that, $T_1 T_2$ is self adjoint iff $T_1 T_2 = T_2 T_1$.]
- ৯। যদি $R: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ এ এমন একটি চিত্রণ হয় যেন $\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|$ তাহলে T এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু নাও থাকতে পারে উদাহরণসহ যথার্থতা নিরূপণ কর। [If $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a mapping with $\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|$ then T may not have any fixed point—Justify your answer with an example.]

গ-বিভাগ

- ১৪। প্রমাণ কর l_p এর দ্বৈত জগত l_q যেখানে $1 < p < \infty$ এবং $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ । [Prove that l_q is a dual space of l_p where $1 < p < \infty$ and $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.]
- ১৫। দেখাও যে, একটি অন্তঃগুণন জগতে $x \perp y$ যদি এবং কেবলমাত্র যদি $\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|$ যেখানে α যেকোনো স্কেলার। [Show that in an inner product space $x \perp y$ iff $\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|$ for all scalars α .]
- ১৬। ধরি N একটি নর্মাল যোগাশ্রয়ী জগত এবং x_0 , N এর একটি অশূন্যক ভেক্টর। তাহলে প্রমাণ কর যে, N' এ একটি ফাংশনাল f_0 এর অস্তিত্ব বিদ্যমান যেন $f_0(x_0) = \|x_0\|$ এবং $\|f_0\| = 1$ । [Let N is a normal linear space and x_0 is a nonzero vector in N then show that there exists a functional f_0 in N' such that $f_0(x_0) = \|x_0\|$ and $\|f_0\| = 1$.]
- ১৭। মেট্রিক জগতের ক্ষেত্রে বানাক এর সংকোচন নীতি বর্ণনা ও প্রমাণ কর। [State and prove Banack construction principle for a metric space.]