

NUH-2020

ক-বিভাগ

- ১। (জ) নর্মড জগতের সংজ্ঞা দাও। [Define a normed space.]
(ঝ) লম্ব যোগফল বলতে কী বুঝ? [What do you mean by orthogonal sum?]
(ঞ) অন্তঃগুণন জগতের জন্য মেরুকরণ অভেদটি লিখ। [Write down the polarization identity in an inner product space.]
(ট) অন্তঃগুণন জগতে কখন দু'টি ভেক্টর পরস্পর লম্ব হবে? [What two vectors are orthogonal in an inner product space?]
(ঠ) মেট্রিক জগতের ক্ষেত্রে সংকোচন চিত্রণ এর সংজ্ঞা দাও। [Define contraction mapping in case of a metric space.]

খ-বিভাগ

- ৬। প্রমাণ কর যে, একটি বানাক জগত X হতে একটি বানাক জগত Y -এ একটি সীমায়িত রৈখিক অপারেটর T একটি খোলা চিত্রণ। [Prove that a bounded linear operator T from a Banach space X into a Banach space Y is an open mapping.]
৭। প্রমাণ কর যে, হিলবার্ট জগত X এর একটি সীমাবদ্ধ যোগাশ্রয়ী অপারেটর T নর্মাল হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি সকল $x \in X$ এর জন্য $\|T^*x\| = \|Tx\|$ হয়। [Prove that a bounded linear operator T on a Hilbert space X is normal iff $\|T^*x\| = \|Tx\|, \forall x \in X$.]
৮। ধরি হিলবার্ট জগত X হতে X -এ T একটি সীমায়িত যোগাশ্রয়ী অপারেটর। দেখাও যে, $T^{**} = T$ এবং $\|T^*\| = \|T\|$ । [Let T be a bounded linear operator on a Hilbert space X into itself. Then show that $T^{**} = T$ and $\|T^*\| = \|T\|$.]

- ৯। যদি X একটি অন্তঃগুণন জগত এবং $x, y \in X$ হয়, তবে দেখাও যে,
 $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ । [If X is an inner product space and $x, y \in X$ then show that $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.]

গ-বিভাগ

- ১৪। নর্মড জগতের ক্ষেত্রে হান-বানাক উপপাদ্য বর্ণনাসহ প্রমাণ কর। [State and prove Hahn-Banach theorem for normed space.]
১৫। হিলবার্ট জগত কী? যদি একটি হিলবার্ট জগত X এর আবদ্ধ যোগাশ্রয়ী উপজগত M হয় তবে প্রমাণ কর যে, $X = M \oplus M^\perp$ । [What is Hilbert space? If M be a closed subspace of a Hilbert space X then prove that $X = M \oplus M^\perp$.]
১৬। যদি একটি হিলবার্ট জগত H এর উপর T একটি আবদ্ধ যোগাশ্রয়ী অপারেটর হয় যেন সকল $x \in X$ এর জন্য $\langle Tx, x \rangle = 0$ । দেখাও যে, $T = 0$ । [If T is a bounded linear operator on a Hilbert space H for which $\langle Tx, x \rangle = 0, \forall x \in X$, then show that $T = 0$.]
১৭। নর্মড জগতের ক্ষেত্রে বানাক এর সংকোচন নীতি বর্ণনা ও প্রমাণ কর। [State and prove Banach contraction principle for a normed space.]