

## NUH-2021

## ক-বিভাগ

- ১। (ছ) বানাক জগতের সংজ্ঞা দাও। [Define a Banach space.]
- (জ) নর্মড জগতের একটি উদাহরণ দাও। [Give an example of a normed space.]
- (ঝ) ভেক্টর জগত  $X$  এর একটি বীজগণিতীয় দ্বৈত জগত এর সংজ্ঞা দাও। [Define an algebraic dual space of a vector space  $X$ .]
- (ঞ) কশি-সোয়ার্জ অসমতাটি বর্ণনা কর। [State Cauchy-Schwartz inequality.]
- (ট) হিলবার্ট-অ্যাডজয়েন্ট অপারেটরের সংজ্ঞা দাও। [Define Hilbert-adjoint operator.]
- (ঠ) বানাক জগতে একটি ঘূর্ণায়মান তলের কতগুলো নির্দিষ্ট বিন্দু আছে? [How many fixed points have a rotation of the plane in a Banach space?]

## খ-বিভাগ

- ৬। অন্তঃগুণজ জগতের জন্য সামান্তরিক সূত্রটি বর্ণনাসহ প্রমাণ কর। [State and prove Parallelogram law for inner product space.]
- ৭। প্রমাণ কর যে, হিলবার্ট জগত  $X$ -এ কোনো অপারেটর  $T$  স্বকীয় এডজয়েন্ট হবে যদি এবং কেবল যদি  $x \in X$  এর জন্য  $\langle Tx, x \rangle$  বাস্তব হয়। [Prove that an operator  $T$  on a Hilbert space  $X$  is self-adjoint iff  $\langle Tx, x \rangle$  is real  $\forall x \in X$ .]
- ৮। যদি  $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  চিত্রণটি  $Tx = \frac{1}{2}x$  দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তবে দেখাও যে, সকল  $x \in \mathbb{R}$  এর জন্য  $T$  এর একটি অনন্য নির্দিষ্ট বিন্দু আছে। [If  $T$  is a mapping of  $\mathbb{R}$  into itself defined by  $Tx = \frac{1}{2}x$ , then show that  $T$  has a unique fixed point  $\forall x \in \mathbb{R}$ .]
- ৯। প্রমাণ কর যে,  $f(x, y) = x + y$  দ্বারা সংজ্ঞায়িত  $f: X \times X \rightarrow X$  চিত্রণটি অবিচ্ছিন্ন, যেখানে  $X$  একটি নর্মড জগত। [Prove that the mapping  $f: X \times X \rightarrow X$  defined by  $f(x, y) = x + y$  is continuous, where  $X$  is a Normed space.]

## গ-বিভাগ

- ১৪। মনে কর নর্মড যোগাশ্রয়ী জগত  $N$ -এর একটি বদ্ধ যোগাশ্রয়ী উপজগত  $M$ । যদি বিভাজন জগত  $N/M$ -এ কোসেট  $x + M$  এর নর্ম  $\|x + M\| = \inf \{\|x + m\| : m \in M\}$  দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তবে দেখাও যে,  $N/M$  একটি নর্মড যোগাশ্রয়ী জগত। [Let  $M$  be a closed linear subspace of a normed linear space  $N$ . If the norm of a coset  $x + M$  in the quotient space  $N/M$  is defined by  $\|x + M\| = \inf \{\|x + m\| : m \in M\}$ , then show that  $N/M$  is a normed linear space.]
- ১৫। জটিল অন্তঃগুণজ জগতের জন্য মেরুকরণ অভেদ বর্ণনা ও প্রমাণ কর। [State and prove the polarization identity for complex inner product space.]
- ১৬। প্রমাণ কর যে, হিলবার্ট-অ্যাডজয়েন্ট অপারেটর  $T^*$  সীমাবদ্ধ, যোগাশ্রয়ী এবং অনন্য। [Prove that Hilbert-adjoint operator  $T^*$  is bounded, linear and unique.]
- ১৭। নর্মড জগতের ক্ষেত্রে সংকোচন চিত্রণের সংজ্ঞা দাও। মেট্রিক জগতের ক্ষেত্রে বানাক সংকোচন নীতি বর্ণনা ও প্রমাণ কর। [Define contraction mapping for normed spaces. State and prove Banach contraction principle for a metric space.]