NUH-2012

১। (ক) ফুরিয়ার ধারার সংজ্ঞা দাও। ফুরিয়ার ধারার ক্ষেত্রে অভিসৃতির পর্যাপ্ত সূত্রগুলি লিখ। পারসিভাল অভেদ বর্ণনা ও প্রমাণ কর। [Define Fourier series. Write sufficient conditions for convergence of a Fourier series. State and prove Parseval's identity.]

(খ) $-\pi < x < \pi$ ব্যবধিতে $f(x) = x + x^2$ ফাংশনটিকে ফুরিয়ার ধারায় বিস্তৃত কর। এটি হতে দেখাও যে, $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$। [Find the Fourier series of the function $f(x) = x + x^2$ in the interval $-\pi < x < \pi$. Hence prove that, $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$.]

২। (ক) ফুরিয়ার রূপান্তরের সংজ্ঞা দাও। $f(x)$ এর সসীম ফুরিয়ার সাইন রূপান্তর নির্ণয় কর যেখানে [Define Fourier transform. Find the finite Fourier sine transform of $f(x)$, if] $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$

(খ) $U(0,t) = 0, U(6,t) = 0, t > 0$ $U(x,0) = \begin{cases} 1, 0 < x < 3 \\ 0, 3 < x < 6 \end{cases}$ শর্ত সাপেক্ষে $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, 0 < x < 6$ এর একটি সমাধান $U(x,t)$ নির্ণয় কর। [Find a solution $U(x,t)$ of the boundary value problem $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, 0 < x < 6$ subject to the conditions $U(0,t) = 0, U(6,t) = 0, t > 0$]

৩। (ক) ফুরিয়ার রূপান্তরের জন্য কনভলিউশন উপপাদ্যটি বর্ণনাসহ প্রমাণ কর। [State and prove the Convolution theorem for Fourier transforms.]

(খ) যদি [If] $U = U(x,t), \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(0,t) = 1, U(\pi,t) = 3, U(x,0) = 1$, $0 < x < \pi, t > 0$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে [then show that],

$$U(x,t) = 1 + \frac{2x}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{4(-1)^n}{n\pi} \right\} e^{-n^2 t} \sin nx$$

৪। (ক) $e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$ জেনারেটিং ফাংশন ব্যবহার করে নিম্নলিখিত সম্পর্কগুলি প্রমাণ কর। [Using the generating function $e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$, prove that]:

(i) $x J_n'(x) = x J_{n-1}(x) - n J_n(x)$

(ii) $x J_n'(x) = n J_n(x) - x J_{n+1}(x)$

(খ) প্রমাণ কর [Prove that]:

(i) $J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{\sin x}{x} - \cos x \right]$

(ii) $J_0^2(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(x) = 1$

৫। (ক) লেজেন্ডার বহুপদী থেকে রডরিগসের সূত্রটি বর্ণনাসহ প্রমাণ কর। [State and prove Rodrigue's formula for Legendre polynomials.]

(খ) দেখাও যে [Show that],

(i) $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$

(ii) $(2n+1) P_n(x) = P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x)$

৬। (ক) হারমাইট বহুপদী ও লেজেন্ডার বহুপদী মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর। [Establish relation between Hermite polynomial and Legendre polynomial.]

(খ) প্রমাণ কর যে [Prove that], $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 2^n \underline{|n} \sqrt{\pi} \delta_{mn}$

যেখানে [where] $\delta_{mn} = \begin{cases} 0, \text{যখন } m \ne n \\ 1, \text{যখন } m = n \end{cases}$

৭। (ক) ল্যাগুরীর বহুপদী $L_n(x)$ এর সংজ্ঞা দাও। প্রমাণ কর যে, $L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$ অতঃপর $L_0(x), L_1(x), L_2(x), L_3(x)$ এর মান বাহির কর। [Define Laguerre polynomial $L_n(x)$. Prove that $L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$. Hence evaluate $L_0(x), L_1(x), L_2(x), L_3(x)$.]

(খ) (i) $f(x)=e^{-ax}$ কে ল্যাগুরীর বহুপদীতে বিস্তৃত কর। [Expand $f(x)=e^{-ax}$ in terms of Laguerre polynomials.]

(ii) প্রমাণ কর যে [Prove that], $L_n'(x)=-\sum_{r=0}^{n-1} L_r(x)$

৮। (ক) জটিল ডোমেনে গামা ফাংশনের জন্য ডুপ্লিকেশন সূত্রের বর্ণনাসহ প্রমাণ কর। [State and prove the duplication formula for the Gamma function in complex domain.]

(খ) $\psi(z)$ এর সংজ্ঞা দাও। প্রমাণ কর যে [Define $\psi(z)$ prove that], $\Gamma(3z)=\frac{3^{3z-(1/2)}}{2\pi}\Gamma z\left(z+\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{3}\right)$ ।

৯। (ক) মান নির্ণয় কর [Evaluate the following]:

(i) $L^{-1}\left\{\frac{6s-4}{s^2-4s+20}\right\}$

(ii) $L^{-1}\left\{\frac{2s-11}{s^2-s-6}\right\}$

(খ) ল্যাপলাস রূপান্তর ব্যবহার করে নিম্নবর্ণিত অন্তরক সমীকরণটি সমাধান কর [Use Laplace transforms to solve the differential equation]:

$x''(t)-x(t)-6\cos 2t=0, x(0)=3, x'(0)=1$

১০। (ক) যদি $L\{f(t)\}=f(s)$ তবে দেখাও যে [If $L\{f(t)\}=f(s)$ then show that], (i) $L\{f(at)\}=\frac{1}{a}f\left(\frac{s}{a}\right)$

(ii) $L\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u}du\right\}=\frac{1}{s}\tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$

(খ) (i) কনভুলেশন উপপাদ্য ব্যবহার করে $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^3}\right\}$ এর মান বাহির কর।[Using Convolution theorem evaluate $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^3}\right\}$.]

(ii) একটি ফাংশনের n তম অন্তরীকরণের উপর ল্যাপলাসের রূপান্তরের সূত্র প্রতিষ্ঠা কর। [Establish the formula of the Laplace transform of a function of n-th derivative.]