NUH-2022

ক-বিভাগ

১। (ক) বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞা দাও। [Define inverse Laplace transform.]

(খ) যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয় তবে $L\{F''(t)\} =$ কত? [If $L\{F(t)\} = f(s)$, then $L\{F''(t)\} = ?$]

(গ) লেজেন্ডার বহুপদীর জন্য রডরিগের সূত্রটি লেখ। [Write Rodrigue's formula for Legendre polynomial.]

(ঘ) $J_n(x)$ এর উৎপাদনকারী ফাংশন বর্ণনা কর। [State the generating function of $J_n(x)$.]

(ঙ) এরর ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। [Define error function.]

(চ) লম্বিক ফাংশন কাকে বলে? [What is called orthogonal function?]

(ছ) লেজেন্ডার ডুপ্লিকেশন সূত্রটি লেখ। [Write down the duplication formula of Legendre.]

(জ) হারমাইট ও লেজেন্ডার বহুপদীর সম্পর্কের সূত্রটি লেখ। [Wrte the formula of relation between the Hermite' and Legendre polynomials.]

(ঝ) জটিল ডোমেনে গামা ফাংশনের সংজ্ঞা লেখ। [Define Gamma function in Complex domain.]

(ঞ) হারমাইট বহুপদীর সংজ্ঞা দাও। [Write down the integral form of Hermite polynomial.]

(ট) গামা ফাংশনের ভায়ার্ট্রাসের সংজ্ঞাটি লেখ। [Write down the Weierstrass's definition of gamma functions.]

(ঠ) ফ্যুরিয়ার ফাংশনের পর্যায়কাল এর সংজ্ঞা দাও। [Define period of a Fourier function.]

(ড) ফ্যুরিয়ার সহগগুলো কী কী? [What are the Fourier coefficients?]

খ-বিভাগ

২। দেখাও যে [Show that],

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^2}\right\} = te^{-t} + 2e^{-t} + t - 2$$

৩। দেখাও যে [Show that],

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)$$

৪। লেজেন্ডার বহুপদী থেকে রডরিগের সূত্রটি বর্ণনাসহ প্রমাণ কর। [State and prove Rodrigue's formula for Legendre polynomials.]

৫। প্রমাণ কর যে [Prove that],

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

৬। দেখাও যে [Show that],

$$H_n(x) = 2^n\left\{e^{-\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}}(x^n)\right\}$$

৭। ফ্যুরিয়ার রূপান্তরের জন্য কনভলিউশান উপপাদ্যটি প্রমাণ কর। [Prove the convolution theorem for Fourier transform.]

৮। দেখাও যে [Show that],

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

৯। দেখাও যে [Show that],

(i) $erf(-x) = -erf(x)$

(ii) $erf(0) = 0$

গ-বিভাগ

১০। $(-\pi,\pi)$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশনের ফ্যুরিয়ার ধারা নির্ণয় কর যেখানে,

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x & \text{যখন } -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{যখন } 0 < x < \pi \end{cases}$$

এবং অতঃপর দেখাও যে [Find the Fourier series for the functions $f(x)$ in the interval $(-\pi,\pi)$ where

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x \text{ when } -\pi < x < 0 \\ \pi - x \text{ when } 0 < x < \pi \end{cases}$$

and prove that],

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

১১। $F(x)=\begin{cases}1, & |x|<a\\ 0, & |x|>a\end{cases}$ এর ফ্যুরিয়ার রূপান্তর নির্ণয় কর, এবং ইহা হতে $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin na\cos nx}{n}dn$ এর মান নির্ণয় কর। [Find the Fourier Transform of $F(x)=\begin{cases}1, & |x|<a\\ 0, & |x|>a\end{cases}$ and hence evaluate $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin na\cos nx}{n}dn$.]

১২। নিম্নে বর্ণিত আদিমান সমস্যাটি ল্যাপ্লাস রূপান্তর ব্যবহার করে সমাধান কর: $y''+2y'+y=4\sin t$ যখন $y(0)=-2, y'(0)=1$ । [Using Laplace transform solve the initial value problem $y''+2y'+y=4\sin t$, where $y(0)=-2, y'(0)=1$.]

১৩। $f(x)=x^4+2x^3+2x^2-x-3$ ফাংশনটিকে লেজেন্ডার বহুপদীর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [Express $f(x)=x^4+2x^3+2x^2-x-3$ in terms of Legendre polynomial.]

১৪। দেখাও যে [Show that],

$$P_n(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,n!}\int_0^{\infty}t^n e^{-t^2}H_n(xt)dt$$

১৫। জেনারেটিং ফাংশন $e^{\frac{x(t-t^{-1})}{2}}$ ব্যবহার করে দেখাও যে [Using the generating function $e^{\frac{x(t-t^{-1})}{2}}$ show that],

(i) $2J_n'(x)=J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)$,

(ii) $\frac{2n}{x}J_n(x)=J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)$

১৬। প্রমাণ কর যে, $L_n(x)=\frac{e^x}{\lfloor n}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$ ইহা ব্যবহার করে $L_0(x), L_1(x), L_2(x), L_3(x)$ নির্ণয় কর। [Prove that, $L_n(x)=\frac{e^x}{\lfloor n}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$. Using it, find the value of $L_0(x), L_1(x), L_2(x), L_3(x)$.]

১৭। $e^{\frac{x}{2}(t-t^{-1})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n$ জেনারেটিং ফাংশন ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে [Using the generating function $e^{\frac{x}{2}(t-t^{-1})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n$, prove that],

(i) $x\,J_n'(x)=x\,J_{n-1}(x)-n\,J_n(x)$

(ii) $x\,J_n'(x)=n\,J_n(x)-x\,J_{n+1}(x)$