

NUH-2011

- ১। (ক) অনুসমতা মডুলো 'n' বলতে কি বুঝে? দেখাও যে, অনুসমতা সম্পর্ক একটি সমতুল্য সম্পর্ক।

[What do you mean by “congruence modulo n”? Prove that a congruence relation is an equivalence relation.]

(খ) যদি $a \equiv b \pmod{m}$ এবং $c \equiv d \pmod{m}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
 $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ ।

[If $a \equiv b \pmod{m}$ and $c \equiv d \pmod{m}$; prove that $a + c \equiv b + d \pmod{m}$]

(গ) দেখাও যে, 641 একটি মৌলিক সংখ্যা এবং $2^{32} + 1$ সংখ্যাটি 641 দ্বারা বিভাজ্য।

[Show that 641 is a prime number and the number $2^{32} + 1$ is divisible by 641]

- ২। (ক) অয়লারের উপপাদ্যটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর এবং এর থেকে ফার্মার উপপাদ্যটি নির্ণয় কর।

[State and prove Euler's theorem and hence deduce the Fermat's theorem.]

(খ) প্রমাণ কর যে, যদি $(a, m) = d, d > 1$ এবং $d | b$ হয়, তবে
 $ax \equiv b \pmod{m}$ অনুসমতাটির যথার্থ d সংখ্যক সমাধান আছে।
 $14x \equiv 27 \pmod{31}$ অনুসমতাটির সমাধান নির্ণয় কর।

[If $(a, m) = d, d > 1$ and $d | b$; prove that the congruence
 $ax \equiv b \pmod{m}$ has exactly d solutions. Solve $14x \equiv 27 \pmod{31}$.]

- ৩। (ক) p মৌলিক সংখ্যা হলে, প্রমাণ কর যে, $\phi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ । $\phi(105)$

এর মানও নির্ণয় কর।

[If p is a prime number, then show that $\phi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$. Also

find $\phi(105)$]

(খ) পরিপূর্ণ সংখ্যা কি? প্রথম চারটি পরিপূর্ণ সংখ্যা লিখ। N যুগ্ম পরিপূর্ণ সংখ্যা হলে প্রমাণ কর যে, ইহা $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$ আকারের, যেখানে p এবং 2^{p-1} এর প্রত্যেকেই মৌলিক সংখ্যা।

[What is a perfect number? Write down the first four perfect numbers. If N is an even perfect number, Show it has the form of $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$, where each of p and 2^{p-1} is prime]

- ৪। (ক) ভন ম্যাংগোল্ডট ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। প্রমাণ কর যে, $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln n$ এবং

$$\Lambda(n) = -\sum_{d|n} \mu(d) \ln d$$

[Define Von Mangoldt function. Show that $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln n$ and

$$\Lambda(n) = -\sum_{d|n} \mu(d) \ln d]$$

(খ) যদি $f(n)$ একটি গৌনিক ফাংশন এবং $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ এবং হয়, তবে দেখাও যে, $\sum_{d|n} \mu(d) f(d) = (1 - f(p))$ ।

[If f is an arithmetic function and $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$; show that
 $\sum_{d|n} \mu(d) f(d) = (1 - f(p))$]

- ৫। (ক) প্রমাণ কর যে, দুইটি সংখ্যাতাত্ত্বিক ফাংশনের দিরিশলে গুণজ একটি গুণাত্মক ফাংশন।

[Show that the Dirichlet product of two arithmetic function in multiplicative.]

(খ) $[x]$ দ্বারা কি বুঝে? প্রমাণ কর যে, $\sum_{k=1}^n \phi(k) \left[\frac{n}{k}\right] = \frac{n(n+1)}{2}$ ।

[What do you mean by $[x]$? Prove that $\sum_{k=1}^n \phi(k) \left[\frac{n}{k}\right] = \frac{n(n+1)}{2}$]

- ৬। (ক) দ্বিঘাত ফিল্ডে মৌলিক ও এককের সংজ্ঞা দাও। যদি $m = -1, -3$ হয় তবে দ্বিঘাত ফিল্ড $K(\sqrt{m})$ এর এককগুলি নির্ণয় কর। দেখাও যে, যেকোনো বাস্তব দ্বিঘাত ফিল্ডের অসংখ্য একক থাকে। [Define prime and unit in quadratic field. Find the units in the quadratic field $K(\sqrt{m})$, where $m = -1, -3$. Prove that there are infinitely many units in any real quadratic field]
- (খ) প্রমাণ কর যে, প্রত্যেক স্বাভাবিক সংখ্যাকে চারটি পূর্ণসংখ্যার বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায়। [Prove that every natural number can be expressed as the sum of four squares.]