NUH-2013

ক-বিভাগ

১। (ক) যোগসিদ্ধ সংখ্যা। [Perfect number.]

(খ) যুগল মৌলিক। [Twin primes.]

(গ) অয়লার $\varphi-$ফাংশন। [Euler $\varphi-$function]

(ঘ) বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা ফাংশন। [Greatest integer function.]

(ঙ) অনুসমতা। [Congruence.]

(চ) n-এর p ঘাত বা, $V_p(n)$. [p-exponent of n or $V_p(n)$.]

(ছ) মোবিয়াস ফাংশন। [Mobius function.]

(জ) দিরিশ্লে গুণজ। [Dirichlet product]

(ঝ) $Q(\sqrt{m})$ দ্বিঘাত ফিল্ডে একক। [Unit in quadratic field $Q(\sqrt{m})$]

(ঞ) গৌণিক ফাংশন। [Multiplicative function.]

(ট) সরল অবিরত ভগ্নাংশ। [Simple continued fraction]

(ঠ) পিথাগোরীয় ট্রিপল। [Pythagorean triple.]

খ-বিভাগ

২। যদি $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$, যেখানে $p_1, p_2, \cdots, p_k$ ভিন্ন ভিন্ন মৌলিক সংখ্যা এবং $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ প্রত্যেকেই ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয় তবে প্রমাণ কর যে, $\sigma(n)=\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i^{\alpha_{i+1}}-1}{p_i-1}$. [If $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$, where $p_1, p_2, \cdots, p_k$ are dutinct primes and $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ are positive integers, then prove that, $\sigma(n)=\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i^{\alpha_{i+1}}-1}{p_i-1}$]

৩। মান নির্ণয় কর: $\varphi(1300)$, $\sigma(1300)$. [Evaluate : $\varphi(1300)$, $\sigma(1300)$.]

৪। প্রমাণ কর যে, $2^{2n}-3n-1$ সংখ্যাটি সর্বদা 9 দ্বারা বিভাজ্য। [Prove that, $2^{2n}-3n-1$ is divisible by 9.]

৫। $7x+19y=213$ এর ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যায় সমাধান নির্ণয় কর। [Find the positive integral solution of $7x+19y=213$]

৬। যদি $(a,m)=1$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $a^{\varphi(m)}\equiv 1(\text{mod } m)$. [If $(a,m)=1$, then prove that, $a^{\varphi(m)}\equiv 1(\text{mod } m)$.]

৭। যদি f এবং g গৌণিক হয়, তবে দেখাও যে, $f*g$ ও গৌণিক হবে। [If f and g are multiplicative, then prove that, $f*g$ is also multiplicative.]

৮। উইলসনের উপপাদ্যটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর। [State and prove Wilsons\s theorem.]

৯। $\sqrt{3}$-কে অবিরত ভগ্নাংশে পরিণত কর। [Express $\sqrt{3}$ as a continued fraction.]

গ-বিভাগ

১০। পাটিগণিতের মৌলিক উপপাদ্যটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর। [State and prove fundamental theorem of Arithmetic.]

১১। দুইটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার গ,সা,গু নির্ণয়ের ইউক্লিডের ভাগ প্রক্রিয়াটি বর্ণনা কর। 42823 ও 6409 সংখ্যা দুইটির গ.সা.গু নির্ণয় কর এবং এই গ.সা.গুকে প্রদত্ত সংখ্যা দুইটির

পূর্ণসাংখ্যিক যোগশ্রেয়ী সমাবেশরূপে প্রকাশ কর। [Describe the Euclid's divison algorithm to determine the GCD of two positive integers. Find the GCD of 42823 and 6409 and express the GCD as integral linear combination of the given two numbers.]

১২। (ক) প্রমাণ কর যে, $\underline{|28} + 233$ সংখ্যাটি 899 দ্বারা বিভাজ্য। [Prove that $\underline{|28} + 233$ is divisible by 899.]

(খ) N জোড়-যোগসিদ্ধ সংখ্যা হলে প্রমাণ কর যে, $N = 2^{p-1}\left(2^p - 1\right)$ যেখানে P এবং $2^p - 1$ মৌলিক সংখ্যা। [Prove that every even prefect number N has the form $N = 2^{p-1}\left(2^p - 1\right)$ where p and $2^p - 1$ are prime numbers.]

১৩। চৈনিক ভাগশেষ উপপাদ্যটি বর্ণনা কর। এই উপপাদ্যের সাহায্যে নিম্নের অনুসমতা জোটের সমাধান কর : [Syaye Chinese remainder theorem. Using this theorem solve the following system of congruence's:]

$$2x \equiv 1 \pmod 3$$
$$3x \equiv 2 \pmod 5$$
$$5x \equiv 3 \pmod 7.$$

১৪। (ক) কোন শর্তে একটি দ্বিঘাত ফিল্ডকে ইউক্লিডিয়ান ফিল্ড বলা হয়? দেখাও যে, $Q\left(\sqrt{23}\right)$ ইউক্লিডিয়ান নয়। [On which condition a quadratic field is said to be Euclidean quadratic field? Show that, $Q\left(\sqrt{23}\right)$ is not Euclidean.]

(খ) $Q\left(\sqrt{2}\right)$ এর সকল একক নির্ণয় কর। [Find all units of $Q\left(\sqrt{2}\right)$]

১৫। যদি a, b, c পূর্ণসংখ্যা এবং $(a, b) = d$, হয় তবে প্রমাণ কর যে, লিনিয়ার দিফান্তীয় সমীকরণ $ax + by = c$ এর একটি সমাধান থাকবে যদি এবং কেবল যদি $d \mid c$ হয়। অধিকন্তু, যদি (x_o, y_o) একটি $ax + by = c$, এর নির্দিষ্ট সমাধান হয়, তবে সমীকরণটির অন্য সমাধানগুলি: $x = x_o + \frac{b}{d}t,\ y = y_o - \frac{a}{d}t$ যেখানে t পূর্ণসংখ্যা-প্রমাণ কর। [If a,b,c are integers and (a,b)=d, then prove that the Diophantine equation $ax + by = c$, will have solution if and only if $d \mid c$. Moreover, if (x_o, y_o) be a particular solution of $ax + by = c$, then prove that the other solutions of the equation are $x = x_o + \frac{b}{d}t,\ y = y_o - \frac{a}{d}t$; where $t \in z$.]

১৬। (ক) প্রমাণ কর যে, $x^4 + y^4 = z^2$ সমীকরণের স্বাভাবিক সংখ্যায় কোনো সমাধান নেই। [Prove that, the equation $x^4 + y^4 = z^2$ has no solution in natural numbers.]

(খ) $m \equiv 1 \pmod 4$ হলে $Q\left(\sqrt{m}\right)$ এর সকল দ্বিঘাত পূর্ণসংখ্যা নির্ণয় কর। [Determine all quadratic integers of $Q\left(\sqrt{m}\right)$ when $m \equiv 1 \pmod 4$.]

১৭। প্রমাণ কর যে, যেকোনো অযুগ্ম মৌলিক সংখ্যাকে চারটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায়। [Prove that any odd prime can be expressed as sum of four squares.]