

NUH-2014

ক-বিভাগ

- ১। (ক) বিভাজন এলগোরিদম বলতে কি বুঝ? [What do you mean by division algorithm?]
- (খ) ফার্মার সংখ্যা এর সংজ্ঞা দাও। [Define Fermat numbers.]
- (গ) সুহৃৎ যুগল কি? [What is amicable pair?]
- (ঘ) সরল দিওফান্তীয় সমীকরণের সংজ্ঞা দাও। [Define linear Diophantine equation.]
- (ঙ) টর্শিয়েন্ট ফাংশন এর সংজ্ঞা দাও। [Define totient function.]
- (চ) সংখ্যাতাত্ত্বিক ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। [Define arithmetical function.]
- (ছ) ভন ম্যানগোল্ডট ফাংশন বলতে কি বুঝ? [What do you mean by Vol-Mangoldt functions?]
- (জ) লিওভিলির ফাংশন $\lambda(n)$ এর সংজ্ঞা দাও। [Define Liouville's function $\lambda(n)$]
- (ঝ) দ্বিঘাত ফিল্ড কাকে বলে? [What do you mean by Quadratic field?]
- (ঞ) দ্বিঘাত পূর্ণ সংখ্যা কি? [Define Quadratic integer.]
- (ট) গাউশিয়ান পূর্ণ সংখ্যার সংজ্ঞা দাও। [Define Gaussian integer.]
- (ঠ) প্যারিটির সংজ্ঞা দাও। [Define parity.]

খ-বিভাগ

- ২। বিভাজন এলগোরিদম উপপাদ্যটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর। [State and prove division algorithm.]
- ৩। যদি $2^p - 1$ মৌলিক সংখ্যা হয়, যেখানে p মৌলিক সংখ্যা তবে দেখাও যে, $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ যোগসিদ্ধ সংখ্যা হবে। [If $2^p - 1$ is a prime where p is a prime then show that, $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ is perfect number.]
- ৪। যদি x যেকোনো বাস্তব সংখ্যা এবং n যেকোনো যোগবোধক পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে দেখাও যে, $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$. [If x is any real number and n is a positive integer then show that, $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$]
- ৫। যদি $(a, m) = 1$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$. [If $(a, m) = 1$ then prove that, $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.]
- ৬। কোনো সূত্র ব্যবহার না করে প্রমাণ কর যে, প্রত্যেক $n > 2$ এর জন্য $\phi(n)$ জোড় সংখ্যা এবং n এর অনুর্ধ্ব এবং n এর সহমৌলিক স্বাভাবিক সংখ্যাগুলির সমষ্টি $\frac{1}{2}n\phi(n)$ । [Without using any formula prove that for every $n > 2$, $\phi(n)$ is an even number and the sum of the natural number not exceeding n and co-prime to n to $\frac{1}{2}n\phi(n)$]
- ৭। যদি $(m, n) = 1$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $m^{\phi(n)} + n^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{mn}$ [If $(m, n) = 1$, then prove that, $m^{\phi(n)} + n^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{mn}$.]

৮। প্রমাণ কর যে, [Prove that] $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$.

৯। $Q(\sqrt{-3})$ এর সকল এককগুলি নির্ণয় কর। [Determine all the unities of $Q(\sqrt{-3})$.]

গ-বিভাগ

১০। চৈনিক ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে নিম্নের অনুসমতাটি সমাধান কর-

$371x \equiv 287 \pmod{460}$. [Solve the equation, $371x \equiv 287 \pmod{460}$, with the help of Chinese remainder theorem.]

১১। Z এর ইউক্লিডীয় এলগোরিদমটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর। ইউক্লিডের ভাগ প্রক্রিয়া ব্যবহার করে 6409 ও 42823 সংখ্যাঘয়ের গ.সা.গু নির্ণয় কর এবং গ.সা.গু. কে সংখ্যাঘয়ের যোগাশ্রয়ী সমাবেশরূপে প্রকাশ কর। [State and prove Euclidean algorithm in Z . Find the g.c.d. of 6409 and 42823 by using Euclidean algorithm and express the g.c.d. as a linear combination of the given numbers.]

১২। (ক) প্রমাণ কর যে, অনুসমতা সম্পর্ক একটি সমতুল্যতা সম্পর্ক। [Prove that, the relation congruence module n is an equivalence relation.]

(খ) ফার্মার উপপাদ্যটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর। [State and prove Fermat's theorem.]

১৩। (ক) দেখাও যে, যদি f একটি গৌণিক ফাংশন হয়, তাহলে এর দিরিশলে বিপরীত ফাংশনও গৌণিক ফাংশন হবে। [Show that if f is a multiplicative

function then its Dirichlete inverse function is also a multiplicative function.]

(খ) দেখাও যে, প্রত্যেক $n \geq 1$ এর জন্য $\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1 & \text{যদি } n \text{ বর্গ হয়} \\ 0 & \text{অন্যথায়} \end{cases}$ [Show

that for every $n \geq 1$ $\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1 & \text{if } n \text{ is a square} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

১৪। প্রমাণ কর যে, একটি বিজোড় মৌলিক সংখ্যা p দুইটি সংখ্যার বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায় যদি এবং কেবল যদি $p \equiv 1 \pmod{4}$ হয়। [Prove that an odd prime p is the sum of two squares if and only if $p \equiv 1 \pmod{4}$]

১৫। (ক) উইলসনের বিপরীত উপপাদ্যটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর। [State and prove the converse of Wilson's theorem.]

(খ) যদি $p \equiv 4n+1$ আকারের মৌলিক সংখ্যা হয়, তবে দেখাও যে, $(2n)$ সংখ্যাটি $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ এর একটি সমাধান। [If p is a prime of the form $4n+1$, then show that, $(2n)$ is a solution of the congruence $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$]

১৬। (ক) যদি m এবং n প্রত্যেকেই দুটি বর্গের সমষ্টি হয়, তবে দেখাও যে, তাদের গুণফল mn ও দুটি বর্গের সমষ্টি। [If m and n are each a sum of two squares, then prove that their product mn is also a sum of two squares.]

খ) যদি (x, y, z) একটি আদিম পীথাগোরীয় ট্রিপল গঠন করে, তবে দেখাও যে,
 $xyz \equiv 0 \pmod{60}$ । [If (x, y, z) is a primitive Pythagorean tripple,
then show that, $xyz \equiv 0 \pmod{60}$]

১৭। প্রমাণ কর যে, ঠিক পাঁচটি জটিল ইউক্লিডিয়ান দ্বিঘাত ফিল্ড $Q(\sqrt{m})$ বিদ্যমান
যেখানে $m \equiv -1, -2, -3, -7, -11$. [Prove that there are just five
complex Euclidean quadratic fields $Q(\sqrt{m})$ in which
 $m \equiv -1, -2, -3, -7, -11$.]