NUH-2018
ক- বিভাগ

১। ক) যুগল মৌলিক এর সংজ্ঞা দাও। [Define twin primes.]

খ) অয়লার ϕ ফাংশন বলতে কী বুঝ? [What do you mean by Euler φ function?]

গ) বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। [Define greatest integer function.]

ঘ) সরল দিওফান্তিন সমীকরণের সংজ্ঞা দাও। [Define simple Diophantine equation.]

ঙ) ফার্মার উপপাদ্য বর্ণনা কর। [State Fermat's theorem.]

চ) কোন শর্তে সরল অনুসমতার অনন্য সমাধান থাকে? [Under what condition a linear congruence has a unique solution?]

ছ) $\mu(240)$ এর মান নির্ণয় কর। [Find the value of $\mu(240)$.]

জ) এককের নর্ম এর সংজ্ঞা দাও। [Define norm of a unity.]

ঝ) গাউসিয়ান পূর্ণসংখ্যার সংজ্ঞা দাও। [Define Gaussian integer.]

ঞ) মোবিয়াসের ইনভার্স ফরমুলার বর্ণনা দাও। [Define norm of a unity.]

ট) মার্টিনের লিমা বর্ণনা কর। [State Mobius inversion formula.]

ঠ) প্যারিটির সংজ্ঞা দাও। [State Merten's Lemma.]

খ-বিভাগ

২। দেখাও যে, যদি $b \mid a$, $c \mid a$ এবং $(b, c) = 1$ হয়, তবে $bc \mid a$। [Show that, if $b \mid a$, $c \mid a$ and $(b, c)=1$, then $bc \mid a$.]

৩। প্রমাণ কর যে, যোগসিদ্ধ সংখ্যাগুলি $2^{n-1}(2^n-1)$ আকারের হবে, যেখানে (2^n-1) মৌলিক সংখ্যা এবং $n>1$. [Prove that, the perfect numbers are of the form $2^{n-1}(2^n-1)$, where (2^n-1) is prime and $n>1$.]

৪। ফার্মার উপপাদ্যটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর। [State and prove Fermat's theorem.]

৫। $(m,n)=1$ হলে দেখাও যে, $m^{\phi(n)}+n^{\phi(m)} \equiv 1 \mathrm{mod}(mn)$. [If $(m,n)=1$ then show that $m^{\phi(n)}+n^{\phi(m)} \equiv 1 \mathrm{mod}(mn)$]

৬। যদি f ফাংশনটি গুণাত্মক হয়, তবে দেখাও যে, $g=\sum_{d|n} f(d)$ দ্বারা বর্ণিত g ফাংশনটি ও গুণাত্মক হবে। [If f is a multiplicative function then show that, the function g defined by $g=\sum_{d|n} f(d)$ is also a multiplicative function.]

৭। মোবিয়াসের বিপরীত্ব সূত্র প্রয়োগ করে অয়লারের সূত্র $\varphi(n)=n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$ প্রমাণ কর। [Prove Euler's formula $\varphi(n)=n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$ by applying the Mobious inversion formula.]

৮। দেখাও যে, অবিরত ভগ্নাংশ $2+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\cdots$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণের মূল। [Show that the continued fraction $2+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\cdots$ is a root of a quadratic equation.]

৯। দেখাও যে, কোন বাস্তব দ্বিঘাত ফিল্ডের অসংখ্য একক আছে। [Show that there are infinitely many units in any real quadratic field.]

গ- বিভাগ

১০। Z এর ইউক্লিডীয় এলগোরিদমটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর। ইউক্লিডের ভাগ প্রক্রিয়া ব্যবহার করে 6409 ও 42823 সংখ্যাদ্বয়ের গ.সা.গু নির্ণয় কর এবং গ.সা.গু কে সংখ্যাদ্বয়ের যোগশ্রয়ী সমাবেশরূপে প্রকাশ কর। [State and prove Euclidean algorithm in Z. Find the g.c.d of 6409 and 42823 by using Euclidean algorithm and express the g.c.d as a linear combination of given numbers.]

১১। যদি m ও n যোগবোধক পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে [If m and n are positive integers then prove that],

i) $\phi(m^2) = m\phi(m)$

ii) $\phi(mn) = \frac{\phi(m)\phi(n)}{\phi d} . d$, যেখানে

১২। $7x + 19y = 213$ সমীকরণের ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যায় সমাধান নির্ণয় কর। [Find the positive integer solution of the equation $7x + 19y = 213$.]

১৩। চাইনিজ ভাগশেষ উপপাদ্য বর্ণনা ও প্রমাণ কর। এ উপপাদ্য প্রয়োগ করে $2x\equiv1(\text{mod } 3)$, $3x\equiv1(\text{mod } 5)$, $5x\equiv1(\text{mod } 7)$ যুগপৎ অনুসমতার সমাধান নির্ণয় কর। [State and prove Chinese remainder theorem. Using this theorem solve the simultaneous congruences $2x\equiv1(\text{mod } 3)$, $3x\equiv1(\text{mod } 5)$, $5x\equiv1(\text{mod } 7)$.]

১৪। ক) প্রমাণ কর যে, যদি f একটি গৌণিক ফাংশন হয়, তাহলে এর দিরিশলে বিপরীত ফাংশনও গৌণিক ফাংশন হবে। [Prove that, if f is a multiplicative function then its Dirichlet inverse function is also a multiplicative function.]

খ) মোবিয়াস বিপরীত্ব সূত্র ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে, $\phi(n) = n\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}$ [Using Mobious inversion formula prove that, $\phi(n) = n\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}$]

১৫। প্রমাণ কর যে, কোনো অযুগ্ম মৌলিক সংখ্যা p কে দুইটি যোগফলরূপে প্রকাশ করা যায় যদি এবং কেবল যদি $p\equiv1(\text{mod } 4)$ হয়। [Prove that, an odd prime p can be expressed as a sum of two squares if and only if $p\equiv1(\text{mod } 4)$]

১৬। দ্বিঘাত ফিল্ড এবং দ্বিঘাত পূর্ণসংখ্যার সংজ্ঞা দাও। $m\equiv1(\text{mod } 4)$ হলে দ্বিঘাত ফিল্ড $Q(\sqrt{m})$এর সকল দ্বিঘাত পূর্ণসংখ্যা নির্ণয় কর। [Define quadratic field and quadratic integer. Find all quadratic integers of the quadratic field $Q(\sqrt{m})$, when $m\equiv1(\text{mod } 4)$.]

১৭। প্রমাণ কর যে, ঠিক পাঁচটি জটিল ইউক্লিডীয় দ্বিঘাত ফিল্ড $Q(\sqrt{m})$রয়েছে যেখানে $m = -1, -2, -3, -7, -11$। [Prove that, there are just five complex Euclidean quadratic fields $Q(\sqrt{m})$ for which $m = -1, -2, -3, -7, -11$.]