

## NUH-2012

১। (ক) মেট্রিক জগতের সংজ্ঞা দাও। মনে কর  $(X, d)$  একটি মেট্রিক জগত। দেখাও যে,  $f(x, y) = \min(1, d(x, y))$ ,  $X$  এর উপর একটি মেট্রিক। [Define a metric space Let  $(X, d)$  be metric space. Show that the function defined by  $f(x, y) = \min(1, d(x, y))$ ,  $X$  is a metric on  $X$ ]

(খ) খোলা এবং আবদ্ধ সেটের উদাহরণসহ সংজ্ঞা দাও। দেখাও যে, খোলা সেটের সসীম ছেদও খোলা। খোলা সেটের অসীম ছেদ কি খোলা? উদাহরণসহ তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও। [Define open and closed sets with examples. Show that finite intersection of open sets is open. Is infinite intersection of open sets is open? Justify your argument through an example]

২। (ক) প্রমাণ কর যে,  $\mathbb{R}^n$  একটি সম্পূর্ণ মেট্রিক জগত। [Prove that  $\mathbb{R}^n$  is a complete metric space]

(খ) বেয়ার ক্যাটিগরি উপপাদ্য বর্ণনা ও প্রমাণ কর। [State and prove Baire Category Theorem]

৩। (ক) টপোলজিগতের সংজ্ঞা দাও। মনে কর,  $X = \{a, b, c, d, f\}$  নিম্নে  $X$  এর উপসেটসমূহের শ্রেণিগুলি প্রতিটি  $X$  এর উপর টপোলজি কিনা নিরূপণ কর [Define Topological space, Let  $X = \{a, b, c, d, f\}$ . Determine whether or not each of the following classes of subsets of  $X$  is a topology on  $X$ ]

$$T_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$$

$$T_2 = \{X, \emptyset, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}\}$$

$$T_3 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$$

(খ)  $X = \{a, b, c\}$  এর ঠিক চার সদস্যবিশিষ্ট সকল টপোলজির তালিকা প্রণয়ন কর। [List of all topologies on  $X = \{a, b, c\}$  which consists exactly four members]

(গ)  $X = \{a, b, c, d, f\}$  এর উপর নিম্নের টপোলজি,  $T$  বিবেচনা কর  $f$  এবং  $c$  এর প্রতিবেশ (গুলি) বের কর [Consider the following topology on  $X = \{a, b, c, d, f\}$ , find all the neighborhood(s) of  $f$  and  $c$ ]

$$T = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, f\}\}$$

৪। (ক) টপোলজিগতের ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা বলতে কি বুঝ? মনে কর  $X$  এবং  $Y$  টপোলজিগত। প্রমাণ কর যে,  $f: X \rightarrow Y$  ফাংশন অবিচ্ছিন্ন হবে কেবল এবং কেবলমাত্র যদি এটি প্রত্যেকটি বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়। [What do you mean by continuity of a function in a topological space? Let  $X$  and  $Y$  are topological space. Then prove that the function  $f: X \rightarrow Y$  is continuous if and only if it is continuous at every points of  $X$ ]

(খ) মনে কর,  $X = \{0, 1, 2\}$ ,  $A = \{0\}$ ,  $B = \{0, 1\}$  এবং  $T = \{X, \emptyset, A, B\}$  যদি  $f$  অবিচ্ছিন্ন হয়, তবে  $f(0)$  নির্ণয় কর, যেখানে  $f(1) = 0$  এবং  $f(2) = 1$  [Let  $X = \{0, 1, 2\}$ ,  $A = \{0\}$ ,  $B = \{0, 1\}$  and  $T = \{X, \emptyset, A, B\}$  is continuous then find  $f(0)$  such that  $f(1) = 0$ ,  $f(2) = 1$ ]

৫। (ক) কখন টপোলজিগতকে বিচ্ছেদ্য বলা হয়? প্রমাণ কর যে, সকল দ্বিতীয় গণনযোগ্য জগত বিচ্ছেদ্য। [When a topological space is said to be separable? Prove that every second countable space is separable]

(খ) যুক্তসেটের সংজ্ঞা দাও।  $T = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, f\}\}$  এর সাপেক্ষে নিম্নের সেটগুলোর সংযুক্ততা যাচাই কর:

$$(i) \{a, b, c\}; (ii) \{a, c, d\}; (iii) \{b, d, f\}$$

[Define connected set. Test the connectedness of the sets:

(i)  $\{a, b, c\}$ ; (ii)  $\{a, c, d\}$ ; (iii)  $\{b, d, f\}$  For the topology

$$T = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, f\}\}$$