

NUH-2011

- ১। (ক) সমতুল্য সম্পর্ক ও সমতুল্য শ্রেণীর উদাহরণসহ সংজ্ঞা দাও। [Define equivalence relation and equivalence class with example of each.]
- (খ) উদাহরণসহ বাইনারী প্রক্রিয়া ও বাইনারী সম্পর্ক ব্যাখ্যা কর। [Explain Binary operation and Binary relation with example.]
- (গ) আবিলীয় গ্রুপের সংজ্ঞা দাও। দেখাও যে, অশূন্য মূলদ সংখ্যার সেট গুণনীয় গ্রুপ। [Define abelian group. Show that the set of non-zero relations is a multiplicative group.]
- ২। (ক) প্রমাণ কর, 4 মাত্রার প্রত্যেক গ্রুপ আবিলীয়। [Prove that every group of order 4 is an abelian group.]
- (খ) উদাহরণসহ একটি উপগ্রুপের সংজ্ঞা দাও। মনে কর, H এবং K গ্রুপ G-এর দুইটি সসীম উপগ্রুপ। তাহলে প্রমাণ কর যে, $O(HK) = \frac{O(H) \cdot O(K)}{O(H \cap K)}$
- যেখানে 'O' ক্রম প্রকাশ করে। [Define a subgroup with an example. Let H and K be any two finite subgroups of a group G. Then prove that $O(HK) = \frac{O(H) \cdot O(K)}{O(H \cap K)}$, where 'O' represents order.]
- ৩। (ক) উদাহরণসহ চক্রক্রমিক গ্রুপের সংজ্ঞা দাও। দেখাও যে, চক্রক্রমিক গ্রুপের প্রতিটি উপগ্রুপও চক্রক্রমিক। [Define a cyclic group with example. Prove that every subgroup of a cyclic group is cyclic.]
- (খ) $f: G \rightarrow G'$ গ্রুপ অনুচিত্রণ হলে প্রমাণ কর যে, $G/\text{Ker } f$ ও $\text{Im } f$ সমচিত্রিক গ্রুপ। [If $f: G \rightarrow G'$ is a group homomorphism, prove that $G/\text{Ker } f$ and $\text{Im } f$ are isomorphic groups.]
- ৪। (ক) মনে কর H গ্রুপ G এর একটি উপগ্রুপ। গ্রুপ G তে H এর নর্মালাইজার $N(H)$ সংজ্ঞায়িত কর। দেখাও যে [Let H be a subgroup of a group G. Define normalizer of H in G denoted by $N(H)$. Prove that],
- (i) $N(H)$ গ্রুপ G এর উপগ্রুপ। [$N(H)$ is a subgroup of G.]
- (ii) $H \triangleleft N(H)$; [H is normal in $N(H)$]

(খ) দেখাও যে, প্রত্যেক সসীম গ্রুপ G বিন্যাস গ্রুপের সাথে সমচিত্রিক। [Show that every finite group G is isomorphic to a permutation group.]

- ৫। (ক) নর্মালা উপগ্রুপ, গ্রুপ অনুচিত্রণ এবং কার্নেলের সংজ্ঞা দাও। $f: G \rightarrow G'$ গ্রুপ অনুচিত্রণ হলে দেখাও যে $\text{Ker } f$, G এর নর্মালা উপগ্রুপ এবং $\text{Im } f$, G' এর উপগ্রুপ। [Define normal subgroup. Group homomorphism and kernel. If $f: G \rightarrow G'$ is a group homomorphism. Prove that $\text{Ker } f$ is a normal subgroup of G and $\text{Im } f$ is a subgroup of G']
- (খ) যদি G একটি সসীম গ্রুপ এবং $a \in G$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $a^{O(G)} = e$ যেখানে e, G এর একক উপাদান। [If G is a finite group and $a \in G$. Then prove that $a^{O(G)} = e$ where e is the identity element of G.]
- ৬। (ক) উদাহরণসহ রিং, ইন্টিগ্রাল ডোমেন, ফিল্ড ও আইডিয়ালের সংজ্ঞা দাও। [Define ring, integral domain, field and ideal with examples.]
- (খ) প্রমাণ কর যে, ফিল্ডই ইন্টিগ্রাল ডোমেন। [Prove that every field is an integral domain.]
- ৭। (ক) প্রমাণ কর যে, যদি R রিং-এর প্রত্যেক উপাদান সমঘাতি হয়, তবে দেখাও যে, R অবশ্যই বিনিময় রিং হবে। বিপরীতটি কি সত্য? একটি উদাহরণ দ্বারা তোমার উত্তরের যথার্থতা যাচাই কর। [If each element of a ring R is idempotent, then show that R must be a commutative ring. Is the converse true? Justify your answer by an example.]
- (খ) প্রমাণ কর যে, একটি ইন্টিগ্রাল ডোমেন এর বৈশিষ্ট্যস্বত্ব শূন্য বা মৌলিক সংখ্যা। [Prove that characteristic of an integral domain is either zero or a prime number.]
- ৮। (ক) প্রমাণ কর যে, প্রত্যেক আইডিয়াল উপরিং কিন্তু প্রত্যেক উপরিং আইডিয়াল নয়। [Prove that every ideal is sub-ring but every subring is non ideal.]

(খ) মুখ্য আইডিয়ালের সংজ্ঞা দাও। প্রমাণ কর যে, \mathbb{Z} এর প্রত্যেক আইডিয়াল মুখ্য আইডিয়াল। [Define principal ideal. Prove that every ideal in \mathbb{Z} is a principal ideal.]

৯। (ক) বহুপদী রিং এর সংজ্ঞা দাও। দেখাও যে, এটি মুখ্য আইডিয়াল রিং। [Define polynomial ring. Prove that it is a principal ideal ring.]

(খ) $F(x)$ এর দুইটি বহুপদী $f(x)$ এবং $g(x) \neq 0$ দেওয়া আছে। দেখাও যে, $F(x)$ এর দুইটি বহুপদী $t(x)$ ও $r(x)$ আছে যেন $f(x) = t(x)g(x) + r(x)$, যেখানে $r(x) = 0$ অথবা $r(x)$ এর মাত্রা $<$ $g(x)$ এর মাত্রা। [Given two polynomials $f(x)$ and $g(x) \neq 0$ in $F[x]$. Show that \exists two polynomials $t(x)$ and $r(x)$ in $F[x]$ such that $f(x) = t(x)g(x) + r(x)$, where $r(x) = 0$ or $\deg r(x) < \deg g(x)$.]

১০। (ক) ইউনিক ফ্যাক্টরাইজেশন উপপাদ্যের বর্ণনা ও প্রমাণ দাও। [State and prove the Unique Factorization theorem.]

(খ) প্রমাণ কর যে, প্রত্যেকটি সসীম সম্প্রসারণ ফিল্ড বীজগাণিতিক সম্প্রসারণ। [Show that every finite extension of a field is an algebraic extension.]